



## PROBLEMAS DE NUMEROS COMPLEJOS

### Conjugado, opuesto, representaciones gráficas. Tipos de complejos.

1. Clasifica los siguientes números complejos en reales e imaginarios. Di, para cada uno, cuál es la parte real y cuál la imaginaria. a)  $(3i)$ ; b)  $1/3-5/2 i$ ; c)  $6/5; -3i$ ; d)  $\sqrt{3}-\sqrt{5} i$ ; e)  $0$ ; f)  $i$ ; g)  $(1/3)-i$ ; h)  $-15$ .
2. Escribe tres números complejos imaginarios puros, tres números imaginarios y tres números reales.
3. Representa gráficamente los números complejos: a)  $(3+4i)$ ; b)  $-4$ ; c)  $-2i$ ; d)  $(-2+3i)$ ; e)  $(1+3i)$ ; f)  $(6-i)$ ; g)  $-2$ ; h)  $3i$ ; g)  $(-1+i)$ .
4. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de: a)  $-3+5i$ ; b)  $3-2i$ ; c)  $1-2i$ ; d)  $-2+i$ ; e)  $6$ ; f)  $5i$ ; g)  $3$ ; h)  $-4i$ .
5. Indica cuáles de los siguientes números son reales, imaginarios o complejos: a)  $-9$ ; b)  $-3i$ ; c)  $-3i+1$ ; d)  $\sqrt{3}+(1/2)i$ ; e)  $(1/3)i$ ; f)  $\sqrt{2}$ ; g)  $-2i$ ; h)  $(1+3i)$ . Sol: R, I, C, C, I, R, I, C
6. Representa gráficamente los afijos de todos los números complejos  $z$  tales que al sumarlos con su respectivo conjugado, se obtenga dos; es decir:  $z+z'=2$ . Sol: recta  $x=1$
7. Representa gráficamente los números complejos  $z$  tales que  $z-z'=2$ . ¿Qué debe verificar  $z$ ? Sol: es imposible
8. Representa gráficamente los opuestos y los conjugados de a)  $-2-i$ ; b)  $1+i$ ; c)  $3i$ .
9. Escribe en forma trigonométrica y polar los complejos: a)  $4+3i$ ; b)  $-1+i$ ; c)  $5-12i$ . Sol: a)  $5^{71,56^\circ}$ ; b)  $\sqrt{2}^{135^\circ}$ ; c)  $13^{292,6^\circ}$
10. Escribe en las formas binómica y trigonométrica los números complejos: a)  $3^{3/3}$ ; b)  $3^{135^\circ}$ ; c)  $1^{270^\circ}$ . Sol: a)  $3(\cos 60+i \sin 60)=3/2+3\sqrt{3}/2 i$ ; b)  $3(\cos 135+i \sin 135)=-3\sqrt{2}/2+3\sqrt{2}/2 i$ ; c)  $\cos 270+i \sin 270=-i$
11. Calcula tres argumentos del número complejo  $1-i$ . Sol: a)  $315^\circ$ ,  $675^\circ$ ;  $1035^\circ$
12. ¿Cuáles son el módulo y el argumento del conjugado de un número complejo cualquiera  $r\bar{a}$ . Sol:  $r^{360-\bar{a}}$ .
13. Expresa en forma binómica y en forma polar el conjugado y el opuesto del número complejo:  $6^{30^\circ}$ . Sol: a)  $6^{330^\circ}$ ,  $(3\sqrt{3}-3i)$ ; b)  $6^{210^\circ}$ ,  $(-3\sqrt{3}-3i)$

14. Escribe en forma módulo-argumental (polar) los números complejos: a)  $6-8i$ ; b)  $\sqrt{2} + \sqrt{14}i$ ; c)  $-3+4i$ . Sol: a)  $10^{306,9^\circ}$ ; b)  $4^{69,3^\circ}$ ; c)  $5^{126,9^\circ}$

15. Escribe en forma binómica el complejo  $R=2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ . Representalo gráficamente. Sol: a)  $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

16. El módulo de un número complejo es 5 y su argumento  $600^\circ$ . Escribe el número en forma trigonométrica. Sol:  $5(\cos 240 + i \sin 240)$

17. ¿Qué argumento tiene el siguiente número complejo?:  $4(3-2i) + 5(-2+i)$ . Sol:  $303,7^\circ$

18. Averigua como debe ser un complejo  $r_{\hat{a}}$  para que sea: a) un número real; b) un número imaginario puro. Sol: a)  $\hat{a} = 0 + k\delta$ ; b)  $\hat{a} = 90 + k\delta$

19. Escribe en forma polar: a)  $1 + \sqrt{3}i$ ; b)  $-1 + \sqrt{3}i$ ; c)  $1 - \sqrt{3}i$ ; d)  $-1 - \sqrt{3}i$ ; e)  $3\sqrt{3} + 3i$ ; f)  $-3\sqrt{3} - 3i$ . Sol: a)  $2^{60}$ ; b)  $2^{120}$ ; c)  $2^{300}$ ; d)  $2^{240}$ ; e)  $\sqrt{6}^{30}$ ; f)  $\sqrt{6}^{210}$

20. Escribe en forma binómica: a)  $2^{60}$ ; b)  $1^{(3\delta/2)}$ ; c)  $5^{450^\circ}$ ; d)  $2^{180^\circ}$ ; e)  $4^{750^\circ}$ ; f)  $6^{(\delta/3)}$ . Sol: a)  $(1 + \sqrt{3}i)$ ; b)  $-i$ ; c)  $5i$ ; d)  $-2$ ; e)  $(2\sqrt{3} + 2i)$ ; f)  $(3 + 3\sqrt{3}i)$

21. Escribe todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro  $(1,2)$  y radio 5. Sol:  $(5 \cos \hat{a} + 1, (5 \sin \hat{a} + 2)i)$

22. Escribir en forma polar y trigonométrica los números complejos: a)  $\sqrt{3} + 3i$ ; b)  $-1-i$ ; c)  $2-2i$ .

Sol: a)  $\sqrt{12}^{60^\circ}$ ,  $\sqrt{12}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ ; b)  $\sqrt{2}^{225^\circ}$ ,  $\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$ ; c)  $2\sqrt{2}^{315^\circ}$ ,  $2\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$

23. Escribe en forma binómica y trigonométrica los números complejos: a)  $6^{5/3}$ ; b)  $2^{45^\circ}$ ; c)  $2^{300^\circ}$ . Sol: a)  $6(\cos 60 + i \sin 60) = (3, 3\sqrt{3}i)$ ; b)  $2(\cos 45 + i \sin 45) = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$ ; c)  $2(\cos 300 + i \sin 300) = 1 - \sqrt{3}i$

24. Representar gráficamente los opuestos y los conjugados de: a)  $-3-i$ ; b)  $1+i$ ; c)  $+3i$ .

25. Escribir en forma binómica:  $6(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ . Sol:  $3\sqrt{3} - 3i$

26. Hallar el módulo y el argumento de: a)  $(1+i)/(1-i)$ . b)  $(1+i)(2i)$ .

Sol: a)  $1^{90}$ ; b)  $\sqrt{8}^{135}$

27. ¿Qué figura representan en el plano los puntos que tienen de coordenadas polares  $(3, \hat{a})$ ,  $\hat{a}$  variable? ¿y los que tienen  $(r, 90^\circ)$ ,  $r$  variable?.

Sol: a) circunferencia de centro  $(0,0)$  y radio 3; b) semieje OY positivo

28. dado  $z = r\bar{a}$ . Expresar en forma polar: a)  $-z$ , b)  $z^{-1}$ , c) el conjugado de  $z$ , d)  $z^3$ .  
 Sol: a)  $r^{180+\bar{a}}$ ; b)  $(1/r)^{-\bar{a}}$ ; c)  $r^{-\bar{a}}$ ; d)  $r^3\bar{a}$

### **Sumas, Restas, Productos, Divisiones. Mixtos**

1. Efectúa las siguientes operaciones entre números complejos: a)  $(2+3i)+(4-i)$ ; b)  $(3+3i) - (6+2i)$ ; c)  $(3-2i) + (2+i) - 2(-2+i)$ ; d)  $(2-i)-(5+3i) + (1/2)(4-4i)$ .

Sol: a)  $(6+2i)$ ; b)  $(-3+i)$ ; c)  $(9-3i)$ ; d)  $-1-6i$

2. Multiplica los siguientes números complejos: a)  $(1+2i)(3-2i)$ ; b)  $(2+i) \wedge (5-2i)$ ; c)  $(i+1)(3-2i)(2+2i)$ ; d)  $3(2-i)(2+3i)i$ .

Sol: a)  $7+4i$ ; b)  $12+i$ ; c)  $8+12i$ ; d)  $-12+21i$

3. Efectúa las siguientes divisiones de números complejos: a)  $(2+i)/(1-2i)$ ; b)  $(7-i)/(3+i)$ ; c)  $(5+5i)/(3-i)$ ; d)  $(3-i)/(2+i)$ ; e)  $(18-i)/(3+4i)$ . Sol: a)  $i$ ; b)  $2-i$ ; c)  $1+2i$ ; d)  $1-i$ ; e)  $2-3i$

4. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica: a)  $5-3[3+(2/3)i]$ ; b)  $[2i \wedge (-i+2)] / (1+i)$ ; c)  $[(-2i)^2(1+3i)]/(4+4i)$ ; d)  $[(1+3i)(1+2i)]/(1+i)$ . Sol: a)  $-4-2i$ ; b)  $3+i$ ; c)  $-2-i$ ; d)  $5i$

5. Dado el número complejo  $z=2+2i$ , calcula y representa: a) su conjugado ( $z'$ ); b) la suma  $z+z'$ ; c) el producto  $zAz'$ . Sol: a)  $2-2i$ ; b)  $4$ ; c)  $8$

6. Calcula: a)  $(3+i)(2+i)-(1-i)(2-2i)$ ; b)  $(3-2i)+(1+2i)(6-2i)-(2-i)$ ; c)  $(3+2i)+(2-4i) \wedge 6$ . Sol: a)  $(5+9i)$ ; b)  $11+9i$ ; c)  $15-22i$

7. Efectúa los siguientes productos y expresa el resultado en forma polar y binómica: a)  $(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ) \wedge [2(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)]$ ; b)  $[2(\cos 23^\circ + i \operatorname{sen} 23^\circ)] \wedge [3(\cos 37^\circ + i \operatorname{sen} 37^\circ)]$ ; c)  $[5(\cos 33^\circ + i \operatorname{sen} 33^\circ)] \wedge 2^{57^\circ}$ ; d)  $(2+2i)(1-i)$ ; e)  $(3+4i) \wedge 1^{180^\circ}$ . Sol: a)  $2^{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ ; b)  $6^{60^\circ} = 3\sqrt{3} + 3i$ ; c)  $10^{90^\circ} = 10i$ ; d)  $4^0 = 4$ ; e)  $5^{233^\circ} = -3-4i$

8. Efectúa las siguientes operaciones: a)  $1^{150} \wedge 3^{30}$ ; b)  $6^{60} : 2^{15}$ ; c)  $2^{20} \wedge 1^{30} \wedge 2^{70}$ ; d)  $6^{(2\delta/3)} : 3^{90^\circ}$ ; e)  $(5\delta/9)^9$ ; f)  $(2+2i)^4$ . Sol: a)  $3^{180^\circ}$ ; b)  $3^{45^\circ}$ ; c)  $4^{120^\circ}$ ; d)  $2^{30^\circ}$ ; e)  $59^{180^\circ}$ ; f)  $64^{180^\circ}$

9. Efectúa las siguientes operaciones: a)  $2^{05} \wedge 3^{85}$ ; b)  $4^{65} : 2^{15}$ ; c)  $5^{22} \wedge 2^{28} \wedge 1^{30}$ ; d)  $4^{150} : 2^{(\delta/2)}$ ; e)  $(2^{20})^3$ ; f)  $(3^{60})^4$ .

Sol: a)  $6^{190}$ ; b)  $2^{50}$ ; c)  $10^{80}$ ; d)  $2^{60}$ ; e)  $8^{60}$ ; f)  $81^{240}$

10. Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado: a)  $2^{(\delta/2)}$ , b)  $4i$ ; c)  $-3+i$ .

Sol: a)  $(1/2)^{(-\delta/2)}$ ; b)  $-0,25i$ ; c)  $(-3/10)-(1/10)i$

11. ¿Cómo es gráficamente el inverso de un número complejo?. ¿Cuál es su módulo?. ¿Y su argumento?. Sol: a) perpendicular; b) módulo=  $(1/r)$ , argumento=  $-\bar{a}$

12. Simplifica las expresiones:

a)  $\frac{3_{45} 2_{15}}{6_{30}}$     b)  $\frac{2_{30} 3_{60}}{3_{120} 1_{300}}$     c)  $\frac{2_{45} 2_{15}}{4_{90}}$

Sol: a)  $1^{30^\circ}$ ; b)  $2^{30^\circ}$ ; c)  $1^{330}$

13. Efectúa algebraica y gráficamente las operaciones con números complejos: a)  $(3+2i)+(2-3i)$ ; b)  $(-3+2i)+(-2-i)$ ; c)  $(2-i)li$ ; d)  $(-2+i)li$ .

Sol: a)  $(5-i)$ ; b)  $(-5+i)$ ; c)  $(1+2i)$ ;  $(-1-2i)$

14. Calcular los siguientes productos: a)  $2(\cos 23^\circ + i \operatorname{sen} 23^\circ) \cdot 5(\cos 12^\circ + i \operatorname{sen} 12^\circ)$ . b)  $(1+i) \cdot 2^{30^\circ}$ . c)  $2(\cos 18^\circ + i \operatorname{sen} 18^\circ) \cdot 3^{22^\circ}$ .

Sol: a)  $10(\cos 35^\circ + i \operatorname{sen} 35^\circ)$ ; b)  $(-1 + \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i$ ; c)  $6^{40^\circ}$

15. Resolver las ecuaciones: a)  $x^3 - 27 = 0$ . b)  $x^5 + 32 = 0$ .

Sol: a)  $x = 3$ ;  $x = 3^{120}$ ;  $x = 3^{240}$ ; b)  $2^{36+72k}$

16. Dados  $z = (1, 3)$ ,  $w = (2, 1)$  Hallar  $z-w$ ;  $z \cdot w$ ;  $z^{-1}$ .

Sol: a)  $-1 + 2i$ ; b)  $-1 + 7i$ ; c)  $(1/10) - (3/10)i$

17. Dados  $z = -1 + 3i$ ,  $w = -2 + i$ . Calcular y representar a)  $z + w$ ; b)  $z \cdot w$ ; c)  $z^2$ ; d)  $z + w'$ ; e)  $z/w$ .

Sol: a)  $-3 + 4i$ ; b)  $-1 - 7i$ ; c)  $-8 - 6i$ ; d)  $-3 + 2i$ ; e)  $1 - i$

18. Efectúa las siguientes operaciones: a)  $6^{90^\circ} \sqrt{2}^{15^\circ}$ . b)  $8^{120^\circ} / 4^{6/2}$ .

Sol: a)  $3^{75}$ ; b)  $2^{30}$

19. Halla  $\frac{i^{32} \cdot i^{17}}{i^2 \cdot i^3}$     Sol: 1

20. Halla el módulo de los complejos:

a)  $z = -2i(1+i)(-2-2i)(3)$ ; y b)  $w = \frac{(2-i)(-1+2i)}{(1-i)(1+i)}$     Sol: a) 24; b) 5/2

21. Representa gráficamente las sumas: a)  $(-i) + (3-i)$ ; b)  $(-2+i) + (3-2i)$ .

22. Representa gráficamente el número complejo  $3-2i$ . Aplícale un giro de  $90^\circ$  alrededor del origen. ¿Cuál es el nuevo número complejo?. Multiplica ahora  $3-2i$  por  $i$ . Sol:  $2+3i$ ;  $12+5i$

23. Halla el módulo de  $z = \frac{2-4i}{4+2i}$ . Sol:  $|z| = 1$

### **Ecuaciones**

1. Resuelve las siguientes ecuaciones y di en qué campo numérico tienen solución: a)  $x^2 + 4 = 0$ ; b)  $x^2 - 9 = 0$ ; c)  $x^2 + 1 = 0$ .

Sol: a)  $2i$ ; b)  $3$ ; c)  $i$

2. Resuelve las ecuaciones: a)  $x^2 - 2x + 5 = 0$ ; b)  $x^2 - 6x + 13 = 0$ ; c)  $x^2 - 4x + 5 = 0$ .

Sol: a)  $1 \pm 2i$ ; b)  $3 \pm 2i$ ; c)  $2 \pm i$

3. Encuentra los puntos de intersección de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 2$  y la recta  $y = x$ . ¿Son soluciones reales o imaginarias?. Sol: reales:  $(1,1)$ ,  $(-1,-1)$

4. Encuentra los puntos de intersección de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  y la recta  $y = x - 3$ . ¿Son soluciones reales o imaginarias?.

Sol: imaginarias  $x = 3/2 \pm (\sqrt{5}/2)i$

5. ¿A qué campo numérico pertenecen las soluciones de estas ecuaciones?. a)  $x^2 - 3x + 2 = 0$ ; b)  $x^2 - 2x + 2 = 0$ ; c)  $2x^2 - 7x + 3 = 0$ ; d)  $(x^2/2) + 8 = 0$ .

Sol: a) Real,  $x = 2$ ,  $x = 1$ ; b) Imaginaria  $x = 1 \pm i$ ; c) Real,  $x = 1/2$ ,  $x = 3$ ; d) Imaginaria,  $x = \pm 4i$

6. Calcula los puntos de intersección de la elipse  $(x^2/4) + (y^2/9) = 1$  con la recta  $x = 5$ .

Sol:  $\pm 9/4 i$

7. Resuelve las ecuaciones siguientes indicando el campo numérico al que pertenecen las soluciones: a)  $x^2 - 4 = 0$ ; b)  $x^2 - 5 = 0$ ; c)  $x^2 + 1 = 0$ .

Sol: a)  $\pm 2$ ; b)  $\pm \sqrt{5}$ ; c)  $\pm i$

8. Resuelve las ecuaciones: a)  $x^2 - 10x + 29 = 0$ ; b)  $x^2 - 6x + 10 = 0$ ; c)  $x^2 - 4x + 13 = 0$ .

Sol: a)  $5 \pm 2i$ ; b)  $3 \pm i$ ; c)  $2 \pm 3i$

9. Representa gráficamente las raíces de las ecuaciones: a)  $x^2 + 4 = 0$ ; b)  $x^2 + 1 = 0$ ; c)  $x^2 - 9 = 0$ ; d)  $x^2 + 9 = 0$ . Sol: a)  $\pm 2i$ ; b)  $\pm i$ ; c)  $\pm 3$ ; d)  $\pm 3i$

10. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean  $2 + 2i$  y  $2 - 2i$ . (Recuerda:  $x_1 + x_2 = (-b/a)$ ;  $x_1 \cdot x_2 = (c/a)$ . Sol:  $x^2 - 4x + 8 = 0$

11. Resuelve la ecuación  $x^3 + 27 = 0$ . Representa gráficamente todas sus soluciones. Sol:  $x = 3^{180^\circ}$ ,  $x = 3^{300^\circ}$ ,  $x = 3^{60^\circ}$

12. Resuelve la ecuación de segundo grado  $x^2 - 2x + 17 = 0$ . Tiene dos raíces complejas. ¿Cómo son entre sí?. ¿Se puede generalizar el resultado?.

Sol: a)  $1 \pm 4i$ ; b) conjugadas; c) sí

13. Resuelve las ecuaciones: a)  $x^3 - 8 = 0$ ; b)  $x^5 - 32 = 0$ ; c)  $x^4 - 81 = 0$ ; d)  $x^3 - 1 = 0$ .

Sol: a)  $x = 2^{120k}$ ; b)  $x = 2^{72k}$ ; c)  $x = \pm 3$ ;  $x = \pm 3i$ ; d)  $x = 1$ ,  $x = 1^{120}$ ,  $x = 1^{240}$

14. Resuelve la ecuación  $x^2 - 4x + 5 = 0$  y comprueba que, en efecto, las raíces obtenidas verifican dicha ecuación. Sol: a)  $2 \pm i$

15. Resuelve las ecuaciones  $x^6 + 64 = 0$  y  $x^4 + 81 = 0$ .

Sol: a)  $x = 2^{90+60k}$ ; b)  $x = 3^{45+90k}$

16. Escribe una ecuación de raíces  $1+3i$ ,  $1-3i$ . Sol:  $x^2-2x+10=0$

17. Probar que  $3+i$  y  $3-i$  son raíces de la ecuación  $x^2-6x+10$ .

Sol:  $[x-(3+i)][x-(3-i)]=x^2-6x+10$

18. Resolver la ecuación: a)  $x^4+1=-35$ . Sol:  $x=\sqrt{3}+\sqrt{3}i$ ;  $x=-\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

### **Potencias, raíces. Mixtos**

1. Calcula las potencias: a)  $(2-3i)^3$ ; b)  $(3+i)^2$ ; c)  $i^{23}$ ; d)  $(2+2i)^4$ .

Sol: a)  $-46-9i$ ; b)  $8+6i$ ; c)  $-i$ ; d)  $-64$

2. Calcula: a)  $i^{27}$ ; b)  $i^{48}$ ; c)  $i^7$ ; d)  $i^{12}$ ; e)  $i^{33}$ ; f)  $i^{35}$ .

Sol: a)  $-i$ ; b)  $1$ ; c)  $-i$ ; d)  $1$ ; e)  $i$ ; f)  $-i$

3. Sabemos que  $z=3-2i$ , que  $z=4-3i$  y que  $z=-3i$ . Calcular: a)  $z^1+2z^2-z^3$ ; b)  $z^1(z^2+z^3)$ ; c)  $z^2$ ; d)  $2z^1-z^2+z^3$ .

Sol: a)  $11-5i$ ; b)  $-26i$ ; c)  $7-24i$ ; d)  $2-4i$

4. Calcula: a)  $(1+2i)^3$ ; b)  $(-3-i)^4$ ; c)  $(1-3i)^2$ . Sol: a)  $-11-2i$ ; b)  $28+96i$ ; c)  $-8-6i$

5. Calcula: a)  $i^{210}$ ; b)  $i^{312}$ ; c)  $i^{326}$ ; d)  $i^{1121}$ . Sol: a)  $-1$ ; b)  $1$ ; c)  $-1$ ; d)  $i$

6. Calcula a)  $(1+i)^3$ ; b)  $(1-i)^3$ ; c)  $(-1+i)^3$ ; d)  $(-1-i)^3$ . Sol: a)  $-2+2i$ ; b)  $-2-2i$ ; c)  $2+2i$ ; d)  $2-2i$

7. Calcula: a)  $1/i^3$ ; b)  $1/i^4$ ; c)  $i^{-1}$ ; d)  $i^{-2}$ . Sol: a)  $i$ ; b)  $1$ ; c)  $-i$ ; d)  $-1$

8. Dados los complejos:  $z^1=3^{45^\circ}$ ;  $z^2=2^{30^\circ}$  y  $z^3=-2i$ . Calcula: a)  $z^1z^2z^3$ ; b)  $z^1 / (z^2)^2$ ; c)  $(z^1)^2 / [z^2(z^3)^3]$ . Sol: a)  $6^{315^\circ}$ ; b)  $(3/4)^{-15^\circ}$ ; c)  $(9/16)^{330^\circ}$

9. Calcula, expresando el resultado en forma polar: a)  $(1+i)^6$ ; b)  $[(-1/2)+(\sqrt{2}/2)i]^8$ ; c)  $(1-i)^4$ . Sol: a)  $8^{270^\circ}$ ; b)  $1^{240^\circ}$ ; c)  $4^{180^\circ}$

10. Calcula las potencias: a)  $[2(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)]^4$ ; b)  $(\sqrt{2}^{30^\circ})^6$ ; c)  $[^4\sqrt{3}(\cos 10^\circ + i \operatorname{sen} 10^\circ)]^8$ .

Sol: a)  $16^{180^\circ}$ ; b)  $8^{180^\circ} = -8$ ; c)  $9^{80^\circ}$

11. Calcula las raíces quintas de la unidad. Hazlo expresando 1 como complejo en forma polar.

Sol:  $10^\circ$ ;  $172^\circ$ ;  $144^\circ$ ;  $1216^\circ$ ;  $1288^\circ$

12. Calcula: a)  $\sqrt{-i}$ ; b)  $\sqrt[3]{1+i}$ ; c)  $\sqrt{-16}$

Sol: a)  $1^{135^\circ}$ ;  $1^{315^\circ}$ ; b)  $\sqrt[3]{2}^{15^\circ}$ ;  $\sqrt[3]{2}^{135^\circ}$ ;  $\sqrt[3]{2}^{255^\circ}$ ; c)  $4^{90^\circ}$ ,  $4^{270^\circ}$

13. Calcula  $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1-\sqrt{3}i}}$ . Sol:  $1/\sqrt[6]{2}^{5+120k}$

14. Calcula las raíces siguientes y representa gráficamente las soluciones: a)  $\sqrt{-4}$ ; b)  $\sqrt[3]{-27}$ ; c)  $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}$ ; d)  $\sqrt[3]{\frac{-27}{i}}$

Sol: a)  $2^{90^\circ}$ ,  $2^{270^\circ}$ ; b)  $3^{60}$ ,  $3^{180}$ ,  $3^{300}$ ; c)  $1^{30}$ ,  $1^{150}$ ,  $1^{270}$ ; d)  $3^{30}$ ,  $3^{150}$ ,  $3^{270}$

15. Calcula las raíces: a)  $\sqrt{4(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)}$ ; b)  $\sqrt[3]{27(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ)}$ ; c)  $\sqrt[4]{81(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)}$ ; d)  $\sqrt[6]{i}$ . Sol: a)  $2^{30}$ ,  $2^{210}$ ; b)  $3^{60}$ ,  $3^{180}$ ,  $3^{300}$ ; c)  $3^{40+90k}$ ; d)  $1^{15+60k}$

16. ¿De qué número es  $(2+3i)$  raíz cúbica?. Sol:  $-46+9i$

17. a) Opera la expresión  $(1+3i)^2(3-4i)$  y b) calcula las raíces cúbicas del resultado. Sol: a)  $50i$ ; b)  $\sqrt[3]{50}^{30+120k}$

18. Calcula el valor de  $(i^4-i^3)/8i$  y encuentra sus raíces cúbicas. Sol:  $(1/2)^{105+120k}$

19. Calcula: a)  $(1+i)^8$ ; b)  $(-1+i)^6$ ; c)  $(1+\sqrt{3}i)^2$ ; d)  $(-2-2i)^4$ . Sol: a)  $16^0$ ; b)  $8^{90}$ ; c)  $10^{120}$ ; d)  $64^{180}$

20. Calcula  $(i^4+i^5)/\sqrt{2}i$ . Escribe el resultado en forma polar. Sol:  $1^{315}$

21. a) Calcula  $(\cos 10^\circ + i \operatorname{sen} 10^\circ)^8$ ; b) Si una raíz cúbica de un número es  $2i$ , calcula las otras dos raíces y ese número. Sol: a)  $1^{80}$ ; b)  $2^{210}$ ,  $2^{330}$ ;  $-8i = 8^{270}$

22. Hallar las raíces cúbicas de los complejos: a)  $2+2i$ ; b)  $1+\sqrt{3}$ ; c)  $-2+2\sqrt{3}i$ . Sol: a)  $\sqrt{2}^{15^\circ}$ ,  $\sqrt{2}^{135^\circ}$ ,  $\sqrt{2}^{255^\circ}$ ; b)  $\sqrt[6]{2}^{20+120k}$ ; c)  $\sqrt[3]{2}^{40+120k}$

23. Calcula:  $z = \sqrt[3]{\frac{8}{2-2i}}$  Sol:  $\sqrt{2}^{15+120k}$

24. Hallar las raíces cúbicas de a)  $-1$  y b)  $-i$ . Sol: a)  $1^{60}$ ,  $1^{180}$ ,  $1^{300}$ ; b)  $1^{90}$ ,  $1^{210}$ ,  $1^{330}$

25. Calcular la siguiente operación expresando las tres raíces en forma polar:

$$\sqrt[3]{\frac{3+3i}{-3+3i}}$$

Sol:  $1^{90}$ ;  $1^{210}$ ;  $1^{330}$

26. Calcular: a)  $i^{14}$ ,  $i^{18}$ ,  $i^{33}$ . b) Si  $z^1 = 2-2i$ ;  $z^2 = 1+3i$ ; y  $z^3 = 2i$ . Hallar:  $2z^1 - z^2 + 2z^3$ ;  $z^1 \cdot (z^2 - z^3)$ ;  $(z^1)^2$ . c) Hallar:  $(1+2i)^3$ . d) Hallar  $x$  para que se verifique que  $(x-i)/(2+i)$

= 1-i.

Sol: a) -1, -1, i; b) 3-3i, 4, -8i; c) -11-2i; d) x= 3

27. Calcular  $\sqrt[3]{-27i}$ . Sol:  $3^{90}$ ,  $3^{210}$ ,  $3^{330}$

28. Calcula las siguientes potencias: a)  $[2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)]^4$ . b)  $(\sqrt{3}^{30^\circ})^8$ .  
Sol: a)  $16^{100^\circ}$ ; b)  $81^{240^\circ}$

29. Hallar el módulo de:  $5 \cdot (i^2 + i^3)/(i^2 - 3i)$ . Sol:  $z = -1 - 2i$ ;  $|z| = \sqrt{5}$

30. Calcular  $(-2 + 2i)^{64}$  Sol:  $8^{32 \cdot 8640} = 8^{32}$

31. Calcula el valor de  $(i^3 - i^{-3})/(2i)$  y halla sus raíces cúbicas.  
Sol: a) -1; b)  $1^{60}$ ,  $1^{180}$ ,  $1^{300}$

32. a) Calcula el valor de la fracción  $(z^3 + z)/(z^2 + 2)$  para  $z = 1 + i$ ; b) Dar el valor de la misma fracción para  $z' = 1 - i$ .  
Sol: a)  $1/2 + i$ ; b)  $1/2 - i$

33. Calcula sin desarrollar los binomios y expresa el resultado en forma binómica: a)  $(1 + i)^4$ , b)  $(1 + \sqrt{3}i)^6$ .  
Sol: a)  $4^{180} = -4$ ; b)  $64^0 = 64$

34. Hallar el conjugado del opuesto de a)  $(1 - 2i)^3$ ; b)  $25/(3 + 4i)$ ; c)  $((2 + i)/(1 - 2i))^2$ .  
Sol: a)  $11 + 2i$ ; b)  $-3 - 4i$ ; c) 1

35. Calcular el valor de  $(z^2 + z - 1)/(z^2 - 2z)$  para  $z = 1 + i$ .  
Sol:  $-3/2 i$

36. Hallar: a)  $(1 + i)^{20}$ , b)  $(2\sqrt{3} - 2i)^{30}$ , c)  $(-\sqrt{3} - i)^{12}$  y expresar el resultado en forma polar y binómica. Sol: a)  $2^{10 \cdot 180} = -2^{10}$ ; b)  $4^{30 \cdot 180} = -4^{30}$ ; c)  $2^{12 \cdot 0} = 4096$

37. Hallar  $z = (\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)^{10}$ ,  $w = (\cos 50^\circ - i \sin 50^\circ)^{30}$  y expresar el resultado en forma binómica. Hallar  $z^{-1}$  y el conjugado de w. Sol:  $z = (\cos 200^\circ + i \sin 200^\circ)$ ;  $w = (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = 1/2 - \sqrt{3}/2 i$ ;  $z^{-1} = 1^{160}$ ;  $w' = 1/2 + \sqrt{3}/2 i$

38. Hallar el módulo y el argumento de  $\left( \frac{2 + 2i}{2 - 2i} \right)^4$  Sol:  $1^{360} = 1$

39. Hallar las raíces quintas de: a) 1, b) -1, c)  $1/32$ , d)  $243i$ , e)  $-32i$ , f)  $\sqrt{3} + i$ .  
Sol: a)  $10 + 72k$ ; b)  $136 + 72k$ ; c)  $(1/2)^{0 + 72k}$ ; d)  $3^{18 + 72k}$ ; e)  $2^{36 + 72k}$ ; f)  $\sqrt[5]{2}^{6 + 72k}$

40. Hallar la raíz cuadrada de los complejos: a)  $5 + 12i$  y b)  $1/(3 + 4i)$ . Sol: a)  $3 + 2i$ ;  $-3 - 2i$ ; b)  $2/5 - 1/5i$ ;  $-2/5 + 1/5i$



41. Calcular y representar los afijos de las raíces cúbicas de  $\frac{2i^9 + i^{-7}}{3i}$ . Expresar el resultado en forma binómica. Sol:  $1, -1/2 + \sqrt{3}/2 i, -1/2 - \sqrt{3}/2 i$

### **Incógnitas reales o complejas**

1. ¿Cuánto debe valer  $x$  para que el número  $(1 + xi)^2$  sea imaginario puro?  
Sol:  $x = 1$

2. Calcula los números  $x$  e  $y$  para que se verifique la igualdad:  
 $(3 + xi) + (y + 3i) = 5 + 2i$ . Sol:  $x = -1; y = 2$

3. Determina el valor de  $x$  para que se verifique la igualdad:  $(x - i)/(1 - i) = (2 + i)$ . Sol:  
 $x = 3$

4. Calcula los números reales  $x$  e  $y$  para que se verifique  $(-4 + xi)/(2 - 3i) = (y - 2i)$ . Sol:  
 $x = -7; y = 1$

5. Determina  $x$  para que el producto  $(3 + 2i)(6 + xi)$  sea: a) un número real; b) un número imaginario puro. Sol: a)  $x = -4$ ; b)  $x = 9$

6. Determinar los números reales  $x$  e  $y$  para que se cumpla:  $\frac{x + 2i}{1 - i} + yi = 1$ . Sol:  
 $x = 4; y = 3$

7. Calcular  $a$  para que el complejo  $z = (4 + ai)/(1 - i)$  sea: a) Imaginario puro. b) Real.  
Sol: a)  $a = 4$ ; b)  $a = -4$

8. Hallar el módulo y el argumento del número complejo:  $z = (x + i)/(x - i)$ ,  $x$  perteneciente a  $\mathbb{R}$ . Sol:  $|z| = 1; \arg z = 2\hat{a}$

9. Determinar  $x$  para que el módulo del complejo  $z = (x + i)/(1 + i)$  sea  $\sqrt{5}$ .  
Sol:  $x = 3$

10. Resolver:  $(4 + xi)/(2 + i) = y + 2i$ . Sol:  $x = 7, y = 3$

11. Hallar el valor de  $x$  para que la operación  $(2 - xi)/(1 - 3i)$  tenga sólo parte real, sólo parte imaginaria y para que su representación esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante, es decir, la parte real e imaginaria sean iguales.  
Sol:  $x = 6, x = -2/3, x = 1$

12. Hallar  $x$  para que el número  $(3 - xi)(2 + i)$  esté representado en la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Sol:  $x = -1$

13. Hallar  $x$  e  $y$  para que se cumpla: a)  $(x - i)(y + 2i) = 4x + i$ ; b)  $(-4 + xi)/(2 + 2i) = y + 3i$ .  
Sol: a)  $x = 2, y = 3$ ; b)  $x = 8, y = 1$

14. Hallar  $x$ , para que la expresión:  $z = (4 + xi)/(2 + i)$  sea: a) real, b) imaginario puro. Sol: a)  $x = 2$ ; b)  $x = -8$

15. Hallar  $k$ , para que  $|z - 2| = 3$ , siendo  $z = k + 3i$ . Sol:  $k = 2$

16. Determina el valor real de  $x$  de modo que el afijo del producto de los números complejos  $3 + xi$  y  $4 + 2i$  sea un punto de la bisectriz del primer cuadrante. Sol:  $x = 1$

17. Resolver el siguiente sistema: 
$$\begin{cases} (2 + i)x + 2y = 1 + 7i \\ (1 - i)x + iy = 0 \end{cases}$$

Sol:  $x = 1 + i$ ;  $y = 2i$

18. Resuelve las ecuaciones siguientes en el campo complejo. En todos los casos  $z$  es un número complejo; despégalo y calcula su valor:

a)  $(2 - 2i)z = 10 - 2i$ ; b)  $\frac{z}{3 + i} = 2 - i$ ; c)  $\frac{z}{3 + 4i} + \frac{2z + 5i}{1 - 2i} = 2 + 2i$ ;

d)  $\frac{z}{-z} + \frac{2z - 2i}{1 - i} = 3 - 2i$

Sol: a)  $3 + 2i$ ; b)  $7 - i$ ; c)  $4 - 3i$ ; d)  $1 - 2i$

19. Despeja  $z$  y calcula su valor en las ecuaciones siguientes: a)  $[z/(1 + i)] + (2 - 3i) = (4 - 4i)$ ; b)  $(3 + i)/z = (1 + 2i)$ ; c)  $(2 + 2i)z = (10 + 2i)$ .

Sol: a)  $3 + i$ ; b)  $1 - i$ ; c)  $3 - 2i$

20. Resuelve los sistemas de ecuaciones siguientes, en los que  $\hat{a}$  y  $\hat{a}$  son números complejos:

a) 
$$\begin{cases} \hat{a} + (2 + i)\mathbf{b} = -3 + 7i \\ (2 - i)\hat{a} + (2 + i)\mathbf{b} = 5 + 3i \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} \hat{a}(1 + 2i) + (1 + i)\mathbf{b} = 5 + 5i \\ (2 + i)\hat{a} + i\mathbf{b} = 2 + 2i \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} (1 + i)\hat{a} + (2 + i)\mathbf{b} = 9 + 2i \\ 2\hat{a} - i\mathbf{b} = 5 - 4i \end{cases}$$

Sol: a)  $\hat{a} = 3 + i$ ;  $\hat{a} = 2i$ ; b)  $\hat{a} = 1 - i$ ;  $\hat{a} = 3 + i$ ; c)  $\hat{a} = 3 - i$ ;  $\hat{a} = 2 - i$

21. Resuelve gráficamente el sistema: 
$$\begin{cases} |z - (2 + i)| = 2 \\ |z - (3 + i)| = 3 \end{cases}$$

22. Sea  $a = 3 - 2i$  un número complejo dado y  $z$  un número complejo cuyo afijo permanece sobre la recta  $r: x + y - 2 = 0$ . Hallar el lugar geométrico de los afijos del complejo  $a + z$ . Sol:  $x + y - 3 = 0$

23. Hallar el lugar geométrico de la imagen del complejo  $z$ , sabiendo que  $2|z| = |z - i|$ . Sol:  $a^2 + b^2 + (2/3)b - (1/3) = 0$  (circunferencia)

24. Calcular  $z$  en las ecuaciones siguientes:

a)  $\frac{z}{1-2i} + 1-i = 2+i$       b)  $\frac{z}{2+i} + \frac{z-i}{2-i} = 3-2i$

Sol: a) 5; b)  $7/2-2i$

25. Resolver el sistema ( $x$  e  $y$  son números complejos):

$$\begin{cases} (2+i)x + (1+i)y = 2+3i \\ (2-i)x - iy = 0 \end{cases}$$

Sol:  $x=i$ ;  $y=2-i$

26. Hallar el número complejo  $z$  que cumpla:  $[z/(2-i)] + [(2z-5)/(2-i)] = 1+2i$ .

Sol:  $z=3+i$

27. Hallar  $z$  tal que  $z^3$  sea igual al conjugado de  $z$ . Sol:  $z=i$ ,  $z=1$ ,  $z=-1$ ,  $z=0$

28. Resolver la ecuación  $(1-i)z^2-7=i$ . Sol:  $z=2+i$  y  $z=-2-i$

## **Problemas y método de Moivre**

### Problemas

1. Si el producto de dos números complejos es  $-18$  y dividiendo uno de ellos entre el otro, obtenemos de resultado  $2i$ . ¿Cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?.  
Sol:  $3^{45^\circ}$  y  $6^{135^\circ}$

2. El cociente de dos números complejos es  $1/2$  y el dividendo es el cuadrado del divisor. Calcula sus módulos y sus argumentos. Sol:  $(1/2)^{0^\circ}$ ;  $(1/4)^{0^\circ}$

3. Aplica un giro de  $90^\circ$  sobre el punto  $A(3,1)$ . Determina, utilizando el cálculo de números complejos, las coordenadas del punto que obtienes.  
Sol: a)  $(-1,3)$

4. La suma de dos números complejos conjugados es  $6$  y la suma de sus módulos  $10$ . ¿De qué números complejos se trata?. Sol:  $(3+4i)$ ,  $(3-4i)$

5. La resta de dos números complejos es  $2+6i$ , y el cuadrado del segundo dividido por el primero es  $2$ . Hallarlos. Sol:  $4+2i$ ,  $6+8i$ ;  $4i$ ,  $-2-2i$

6. Hallar dos números complejos sabiendo que: su diferencia es real, su suma tiene de parte real  $8$  y su producto vale  $11-16i$ . Sol:  $(3-2i)$ ;  $2i$

7. El producto de dos números complejos es  $-27$ . Hallarlos sabiendo que uno de ellos es el cuadrado del otro. Sol:  $3^{60^\circ}$ ,  $9^{120^\circ}$ .

8. La suma de dos números complejos es  $-5+5i$ ; la parte real de uno de ellos es  $1$ .

Determinar dichos números sabiendo que su cociente es imaginario puro. Sol:  $(1+3i)$  y  $(-6+2i)$  ó  $(1+2i)$  y  $(-6+3i)$

9. La suma de dos complejos es  $5-i$  y su producto es  $8+i$ . Hallar los números. Sol:  $3-2i$ ,  $2+i$

10. La suma de dos complejos conjugados es  $8$  y la suma de sus módulos  $10$  ¿Cuáles son los números complejos?. Sol:  $(4+3i)$ ,  $(4-3i)$

11. El producto de dos números complejos es  $-2$  y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es  $1/2$ . Calcula módulos y argumentos. Sol:  $1^{45^\circ}$ ,  $2^{135^\circ}$ ;  $1^{135^\circ}$ ,  $2^{45^\circ}$ ;  $1^{225^\circ}$ ,  $2^{315^\circ}$ ;  $1^{315^\circ}$ ,  $2^{225^\circ}$

12. Halla  $z$  tal que: a) el conjugado de  $z$  ( $z'$ ) sea igual a  $-z$ . b) el conjugado de  $z$  sea igual a  $z^{-1}$ . c) la suma del conjugado de  $z$  más  $z$  sea igual a  $2$ . d)  $z$  menos el conjugado de  $z$  sea igual a  $2i$ . Sol: a)  $z = ki$ ; b)  $a+bi/a^2+b^2=1$ ; c)  $1+ki$ ; d)  $k+i$

13. El complejo de argumento  $70^\circ$  y módulo  $8$  es el producto de dos complejos, uno de ellos tiene de argumento  $40^\circ$  y módulo  $2$ . Escribir en forma binómica el otro complejo. Sol:  $8^{30^\circ} = 4\sqrt{3} + 4i$

14. Determina el número complejo sabiendo que si después de multiplicarlo por  $(1-i)$  se le suma al resultado  $(-3+5i)$  y se divide lo obtenido por  $2+3i$  se vuelve al complejo de partida. Sol:  $1+i$

### Figuras geométricas

15. Sabiendo que los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$  son los afijos de las raíces cúbicas de un número complejo, siendo las coordenadas polares de  $P$   $3^{30^\circ}$ . Hallar las coordenadas polares y cartesianas de  $Q$  y  $R$  y el número complejo. Sol:  $Q = 3^{150^\circ} = -3\sqrt{3}/2 + 3/2 i$ ;  $R = 3^{270^\circ} = -3i$ ;  $27i$

16. Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular, de centro el origen sabiendo que uno de los vértices es el afijo del número complejo  $2^{5/2}$ . Sol:  $2^{150}$ ,  $2^{210}$ ,  $2^{270}$ ,  $2^{330}$ ,  $2^{30}$

17. Halla las coordenadas de los vértices de un cuadrado (de centro el origen de coordenadas) sabiendo que uno de sus vértices es el afijo del número complejo  $1^{120}$ . Sol:  $1^{30^\circ}$ ,  $1^{210^\circ}$ ,  $1^{300^\circ}$

18. Hallar las coordenadas polares y cartesianas de los vértices de un hexágono regular de radio  $3$  u, sabiendo que un vértice está situado en el eje  $OX$ . Sol:  $3^{0^\circ}$ ,  $3^{60^\circ}$ ,  $3^{120^\circ}$ ,  $3^{180^\circ}$ ,  $3^{240^\circ}$ ,  $3^{300}$

19. Los afijos de las raíces de un complejo son vértices de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio  $2$  u; el argumento de una de las raíces es  $45^\circ$ . Hallar el número complejo y las restantes raíces. Sol:  $2^{56}$ ;  $2^{45}$ ,  $2^{90}$ ,  $2^{135}$ ,  $2^{180}$ ,  $2^{225}$ ,  $2^{270}$ ,  $2^{315}$ ,  $2^0$

20. Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado, inscrito en una circunferencia de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el afijo del complejo  $1+2i$ . Sol:  $2+i$ ,  $-2+i$ ,  $-1-2i$

Método de Moivre

21. Expresa en función de  $\cos \hat{a}$  y  $\sin \hat{a}$  y utilizando la fórmula de Moivre: a)  $\cos 2\hat{a}$  y  $\sin 2\hat{a}$ ; b)  $\cos 3\hat{a}$  y  $\sin 3\hat{a}$ . Sol: a)  $\sin 2\hat{a} = 2\sin \hat{a}\cos \hat{a}$ ;  $\cos 2\hat{a} = \cos^2 \hat{a} - \sin^2 \hat{a}$ ; b)  $\sin 3\hat{a} = 3\cos^2 \hat{a}\sin \hat{a} - \sin^3 \hat{a}$ ;  $\cos 3\hat{a} = \cos^3 \hat{a} - 3\cos \hat{a}\sin^2 \hat{a}$

22. Encuentra las fórmulas para calcular  $\sin 4\hat{a}$  y  $\cos 4\hat{a}$  en función de  $\sin \hat{a}$  y  $\cos \hat{a}$ . Sol:  $\sin 4\hat{a} = 4\sin \hat{a}\cos^3 \hat{a} - 4\cos \hat{a}\sin^3 \hat{a}$ ;  $\cos 4\hat{a} = \cos^4 \hat{a} + \sin^4 \hat{a} - 6\cos^2 \hat{a}\sin^2 \hat{a}$

23. Hallar  $\sin^3 5a$  y  $\cos^2 5a$  sabiendo que  $\sin a = 1/2$  y  $a$  pertenece al primer cuadrante. Sol:  $\sin^3 5a = 1/8$ ;  $\cos^2 5a = 3/4$

24. Si  $\sin x = 1/3$  y  $0 < x < \pi/2$ . Hallar  $\sin 6x$  y  $\cos 6x$ . Sol:  $\sin 6\hat{a} = 460\sqrt{2}/729$ ;  $\cos 6\hat{a} = -329/729$