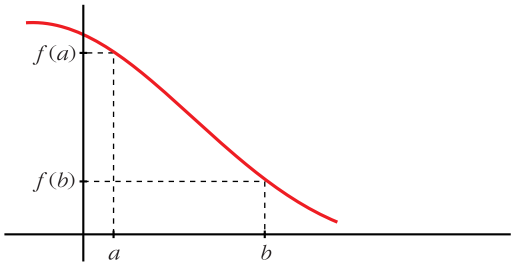
Página 170

1. Dibuja una función y señala dos puntos en ella $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tales que $a < b$ y $f(b) < f(a)$. Observa en ella que la T. V. M. es negativa.



Vemos que la T.V.M. es negativa, puesto que T.V.M. $= \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, siendo en este caso $f(b) - f(a) < 0$ y $b - a > 0$.

Página 171

2. Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 8x + 12$ en los intervalos [1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [1, 7], [1, 8].

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 5}{1} = -5$$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - 5}{3} = -4$$

$$\text{T.V.M. } [1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-4 - 5}{3} = -3$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [1, 6] = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{0 - 5}{5} = -1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 7] = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \frac{5 - 5}{6} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [1, 8] = \frac{f(8) - f(1)}{8 - 1} = \frac{12 - 5}{7} = 1$$

3. Halla la T.V.M. de $y = x^2 - 8x + 12$ en el intervalo variable [1, 1 + h]. Comprueba, dando a h los valores adecuados, que se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

$$\text{T.V.M. } [1, 1 + \text{h}) = \frac{f(1 + \text{h}) - f(1)}{\text{h}} = \frac{(1 + \text{h})^2 - 8(1 + \text{h}) + 12 - 5}{\text{h}} =$$

$$= \frac{\text{h}^2 - 6\text{h}}{\text{h}} = \frac{\text{h}(\text{h} - 6)}{\text{h}} = \text{h} - 6$$

Dando a h los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

Página 174

1. Halla la derivada de $y = 5x - x^2$ en los puntos de abscisas 4 y 5.

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(4+h) - (4+h)^2 - 4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{20 + 5h - 16 - h^2 - 8h - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(-h-3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (-h - 3) = -3$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(5+h) - (5+h)^2 - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(5+h)(5-5-h)}{h} = \lim_{h \to 0} (-5 - h) = -5$$

2. Halla la derivada de $y = \dfrac{3}{x-2}$ en los puntos de abscisas 1, –1 y 5.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[3/(1+h-2)] - (-3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(h-1)] + 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 + 3h - 3}{(h-1)h} = \lim_{h \to 0} \frac{3}{h-1} = -3$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[3/(-1+h-2)] - (-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(h-3)] + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 + h - 3}{h(h-3)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h-3} = -\frac{1}{3}$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[3/(5+h-2)] - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3/(h+3)] - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 - h - 3}{h(h+3)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{h+3} = -\frac{1}{3}$$

3. Halla la derivada de $y = x^2 - 2x$ en los puntos de abscisas –2, –1, 0, 1, 2, 3 y 4.

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-2+h)^2 - 2(-2+h) - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + h^2 - 4h + 4 - 2h - 8}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 6h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-6)}{h} = -6$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-1+h)^2 - 2(-1+h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 - 2h + 2 - 2h - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h-4)}{h} = -4$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 2h - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h - 2)}{h} = -2$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^2 - 2(1 + h) - (-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 + 2h - 2 - 2h + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \to 0} = 0$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^2 - 2(2 + h) - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + h^2 + 4h - 4 - 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2)}{h} = 2$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 2(3 + h) - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + h^2 + 6h - 6 - 2h - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 4)}{h} = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(4 + h)^2 - 2(4 + h) - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16 + h^2 + 8h - 8 - 2h - 8}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 6)}{h} = 6$$

Página 175

1. Halla la derivada de $f(x) = 5x - x^2$ y comprueba que, a partir de ella, se pueden obtener los valores concretos hallados en el ejercicio resuelto 1 y en el ejercicio 1 de la página anterior.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(x + h) - (x + h)^2 - (5x - x^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5x + 5h - x^2 - h^2 - 2xh - 5x + x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 2xh + 5h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-h - 2x + 5)}{h} = \lim_{h \to 0} (-h - 2x + 5) = -2x + 5$$

Sustituyendo x por los valores indicados, obtenemos:

$f'(1) = 3$ $\quad f'(0) = 5$ $\quad f'(3) = -1$ $\quad f'(4) = -3$ $\quad f'(5) = -5$

2. Halla la derivada de $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$ y comprueba que, a partir de ella, se pueden obtener los valores concretos calculados en el ejercicio resuelto 2 y en el ejercicio 2 de la página anterior.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3/(x+h-2) - 3/(x-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(x-2) - 3(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2)} = \lim_{h \to 0} \frac{3x - 6 - 3x - 3h + 6}{h(x-2)(x+h-2)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h(x-2)(x+h-2)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(x-2)(x+h-2)} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

Sustituyendo x por los valores indicados, obtenemos:

$$f'(4) = -\frac{3}{4} \qquad f'(1) = -3 \qquad f'(-1) = -\frac{1}{3} \qquad f'(5) = -\frac{1}{3}$$

3. Halla la derivada de $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 + 3x h^2 + 3x^2 h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h^2 + 3x h + 3x^2)}{h} = 3x^2$$

Página 177

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$f'(x) = 6x - 6$

2. $f(x) = x^3 + 2x - \pi$

$f'(x) = 3x^2 + 2$

3. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

4. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{5}{3\sqrt[3]{(5x)^2}}$$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$$f(x) = x^{-3/2} \to f'(x) = -\frac{3}{2} x^{-5/2} = \frac{-3}{2\sqrt{x^5}} = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$$

15. $\boldsymbol{f(x) = sen\,(x^2 - 5x + 7)}$

$f'(x) = (2x - 5)\ cos\,(x^2 - 5x + 7)$

16. $\boldsymbol{f(x) = cos\,(3x - \pi)}$

$f'(x) = -3\ sen\,(3x - \pi)$

17. $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{(5x + 3)^2} = (5x + 3)^{2/3}}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\ (5x + 3)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x + 3}}$$

18. $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{1 + 2x}}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$$

19. $\boldsymbol{f(x) = sen\,(3x + 1) \cdot cos\,(3x + 1)}$

$f'(x) = 3\ [cos^2\ (3x + 1) - sen^2\ (3x + 1)]$

20. $\boldsymbol{f(x) = x\ e^{2x + 1}}$

$f'(x) = e^{2x + 1} + x\ e^{2x + 1} \cdot 2 = e^{2x + 1}\ (1 + 2x)$

21. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{log\ x^2}{x}}$

$$f(x) = \frac{2\ log\ x}{x};\quad f'(x) = \frac{2\,(1 - ln\ 10\ log\ x)}{x^2\ ln\ 10}$$

22. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{sen\,(x^2 + 1)}{\sqrt{1 - x^2}}}$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1 - x^2}\ cos\ (x^2 + 1) + [x\ sen\ (x^2 + 1)]/\sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2} =$$

$$= \frac{2x\ (1 - x^2)\ cos\ (x^2 + 1) + x\ sen\ (x^2 + 1)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$$

Página 179

1. Calcula la función derivada de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ y halla:

a) Las pendientes de las rectas tangentes en las abscisas –1, 1 y 3.

b) Las ecuaciones de dichas rectas tangentes.

c) Las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos.

d) ¿Es $f(x)$ creciente o decreciente en $x = 2$?

$f'(x) = 3x^2 - 8x$

a) 11, –5 y 3

b) $y = 11(x + 1) - 4$; $\quad y = -5(x - 1) - 2$; $\quad y = 3(x - 3) - 8$

c) $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0,\;\; x = 8/3$

d) $f'(2) = -4 < 0 \;\Rightarrow\;$ decreciente

Página 181

1. Representa estas funciones:

a) $\boldsymbol{y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8}$

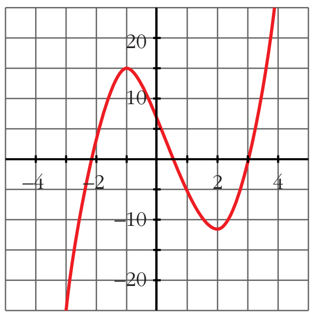
b) $\boldsymbol{y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90}$

c) $\boldsymbol{y = x^4 + 4x^3}$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -1,\;\; x_2 = 2$

Máximo en (–1, 15).

Mínimo en (2, –12).

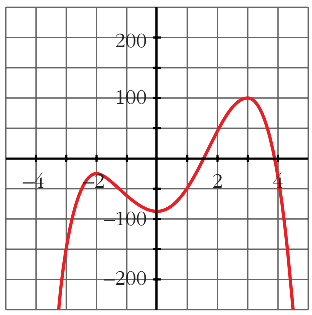


b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Máximo en (–2, –26) y en (3, 99).

Mínimo en (0, –90).



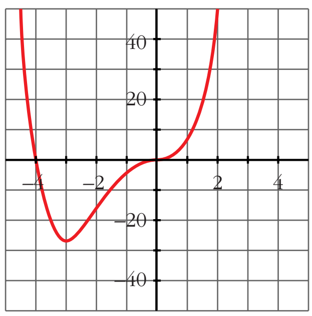
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Mínimo en (–3, –27).

Punto de inflexión en (0, 0).

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^3(x + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (–4, 0).



Página 183

1. Representa estas funciones:

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

a) $f'(x) = \dfrac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 11)}{(x + 1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x + 1)^2} =$

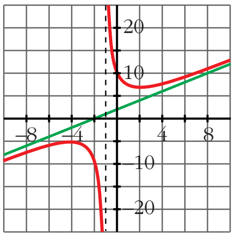
$= \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

Máximo en $(-4, -5)$.

Mínimo en $(2, 7)$.

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$



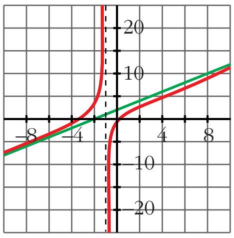
b) $f'(x) = \dfrac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x)}{(x + 1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x}{(x + 1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2} \neq 0$

Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$ y $(-3, 0)$

Asíntota vertical: $x = -1$

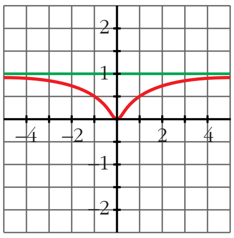
Asíntota oblicua: $y = x + 2$



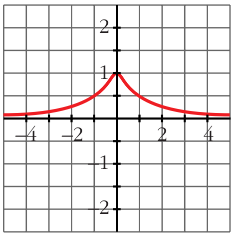
c) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

Mínimo en $(0, 0)$.

Asíntota horizontal: $y = 1$



d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

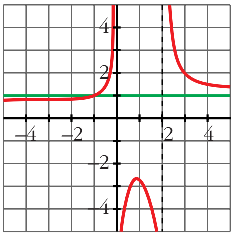


Máximo en (0, 1)

Asíntota horizontal: $y = 0$

e) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x)-(x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{2x^3-4x^2-2x^3+2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} =$

$= \dfrac{-2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0{,}73 \\ x_2 = -2{,}73 \end{cases}$



Máximo en (0,73; –2,73).

Mínimo en (–2,73; 0,73).

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$

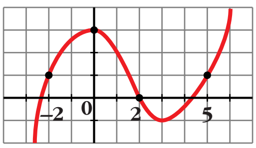
Página 188

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Tasa de variación media

1 **Calcula la tasa de variación media de esta función en los intervalos:**



a) [–2, 0]

b) [0, 2]

c) [2, 5]

a) T.V.M. [–2, 0] $= \dfrac{f(0)-f(-2)}{0+2} = \dfrac{3-1}{2} = 1$

b) T.V.M. [0, 2] $= \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{0-3}{2} = -\dfrac{3}{2}$

c) T.V.M. [2, 5] $= \dfrac{f(5)-f(2)}{5-2} = \dfrac{1-0}{3} = \dfrac{1}{3}$

2 **Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo [1, 3] e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:**

a) $f(x) = 1/x$ **b)** $f(x) = (2 - x)^3$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$ **d)** $f(x) = 2^x$

☛ ***Si la T.V.M. es positiva, la función crece.***

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(3) - f(1)}{2}$$

a) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{1/3 - 1}{2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow$ Decrece

b) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{-1 - 1}{2} = -1 \Rightarrow$ Decrece

c) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{7 - 1}{2} = 3 \Rightarrow$ Crece

d) $\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{8 - 2}{2} = 3 \Rightarrow$ Crece

3 **Dada la función $f(x) = x^2 - 1$, halla la tasa de variación media en el intervalo [2, 2 + h].**

$$\text{T.V.M. } [2, 2 + h] = \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{4 + h^2 + 4h - 1 - 3}{h} = h + 4$$

4 **Comprueba que la T.V.M. de la función $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en el intervalo [1, 1 + h] es igual a $-h + 3$. Calcula la T.V.M. de esa función en los intervalos [1, 2], [1; 1,5], utilizando la expresión anterior.**

$$\text{T.V.M. } [1, 1 + h] = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{-(1 + h^2 + 2h) + 5 + 5h - 3 - 1}{h} =$$

$$= 3 - h = -h + 3$$

T.V.M. [1, 2] = 2

T.V.M. [1; 1,5] = 2,5

5 **Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos [2, 3] y [3, 4] y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.**

Para $f(x)$: T.V.M. [2, 3] = 19

T.V.M. [3, 4] = 37

Para $g(x)$: T.V.M. [2, 3] = 18

T.V.M. [3, 4] = 54

En [2, 3] crece más $f(x)$.

En [3, 4] crece más $g(x)$.

Derivada en un punto

6 **Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(-2)$ y $f'(3)$, siendo:**

$$f(x) = \frac{2x-3}{5}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2(-2+h)-3}{5} + \frac{7}{5}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4 + 2h - 3 + 7}{5h} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2(3+h)-3}{5} - \frac{3}{5}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6 + 2h - 3 - 3}{5h} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

7 **Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:**

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ **b)** $f(x) = (2x+1)^2$

c) $f(x) = 3/x$ **d)** $f(x) = 1/(x+2)$

a) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(1+h)^2 - 1 - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(1 + h^2 + 2h) - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 + 3h^2 + 6h - 3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3h+6)}{h} = 6$$

b) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2(1+h)+1)^2 - 9}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2h+3)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h^2 + 9 + 12h - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4h+12)}{h} = 12$$

c) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3/(1+h) - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3 - 3 - 3h}{h(1+h)} = -3$$

d) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{1+h+2} - \frac{1}{3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 - h - 3}{3(h+3)h} = -\frac{1}{9}$$

8 **Halla el valor del crecimiento de $f(x) = (x-3)^2$ en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.**

$f'(x) = 2(x-3)$

$f'(1) = -4;\quad f'(3) = 0$

9 **Halla la pendiente de la tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 1$ en el punto de abscisa $x = -2$.**

$f'(x) = 2x - 5;\quad m = f'(-2) = -9$

10 **Halla la pendiente de la tangente a la curva $y = 4x - x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

$f'(x) = 4 - 2x;\quad f'(2) = 0$

11 **Comprueba que la función $y = x^2 - 5x + 1$ tiene un punto de tangente horizontal en $x = 2{,}5$.**

$f'(x) = 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = 2{,}5$

Función derivada

12 **Comprueba, utilizando la definición, que la función derivada de las siguientes funciones es la que se indica en cada caso:**

a) $f(x) = 3 \to f'(x) = 0$

b) $f(x) = 5x \to f'(x) = 5$

c) $f(x) = x^2 \to f'(x) = 2x$

d) $f(x) = 7x^2 \to f'(x) = 14x$

e) $f(x) = x^2 + x \to f'(x) = 2x + 1$

a) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3-3}{h} = 0$$

b) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h) - 5x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5x + 5h - 5x}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h} = 5$$

c) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h + 2x)}{h} = 2x$$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{7(x+h)^2 - 7x^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{7(x^2 + h^2 + 2xh) - 7x^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{7h^2 + 14xh}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(7h + 14x)}{h} = 14x$

e) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2 + h^2 + 2xh + x + h - x^2 - x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 2xh + h}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(h + 2x + 1)}{h} = 2x + 1$

13 **La derivada de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3$ es $f'(x) = 3x^2 - 12x$. Utilizando la derivada, responde:**

a) ¿Cuál es la ecuación de la tangente a f en el punto de abscisa $x = 1$?

b) ¿En qué puntos tiene f tangente horizontal?

c) ¿Es creciente o decreciente en $x = -1$?

a) $m = f'(1) = -9$; $f(1) = -2$

La recta es $y = -9(x - 1) - 2$

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 4$

Puntos $(0, 3)$ y $(4, -29)$.

c) $f'(-1) = 15 > 0 \Rightarrow$ Creciente

14 **Sabiendo que la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, halla el punto de f en el que su derivada vale 1/2. ¿Cuál es la ecuación de la tangente en ese punto?**

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2 = 2\sqrt{x} \Rightarrow x = 1,\ y = 1$

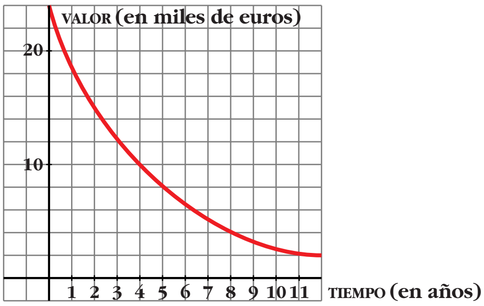
En el punto (1, 1).

La tangente es $y = \dfrac{1}{2}(x - 1) + 1$

15 **Halla los puntos singulares de la función $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$, de la que conocemos su derivada $y' = 6x^2 - 6x$.**

$y' = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 1$. Puntos (0, 1) y (1, 0).

39 **Los coches, una vez que se compran, empiezan a perder valor: un 20% cada año, aproximadamente. Esta gráfica muestra el valor de un coche desde que se compró hasta 12 años más tarde. Calcula lo que se deprecia el coche en los dos primeros años, entre los años 4 y 6, y entre los años 8 y 10. ¿Es constante la depreciación?**



Depreciación: [0, 2] $\rightarrow$ 9 000 €

[4, 6] $\rightarrow$ 3 500 €

[8, 10] $\rightarrow$ 1 500 €

La depreciación no es constante.

40 **Halla los puntos en los que la derivada es igual a 0 en las siguientes funciones:**

a) $y = 3x^2 - 2x + 1$ **b)** $y = x^3 - 3x$

a) $y' = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. Punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

b) $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$. Puntos $(-1, 2)$ y $(1, -2)$

41 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva** $y = x^2 - 5x + 6$ **en el punto de abscisa** $x = 2$**.**

$y' = 2x - 5;\quad m = y'(2) = -1,\ y(2) = 0$

La recta es $y = -(x - 2) = 2 - x$.

42 **Escribe la ecuación de la tangente a la curva** $y = -x^2 + 2x + 5$ **en el punto de abscisa** $x = -1$**.**

$y' = -2x + 2;\quad m = y'(-1) = 4,\ y(-1) = 2$

La recta es $y = 4(x + 1) + 2 = 4x + 6$.

43 **Escribe la ecuación de la tangente a la curva** $y = x^2 + 4x + 1$**, cuya pendiente sea igual a 2.**

$y' = 2x + 4 = 2 \Rightarrow x = -1;\ y(-1) = -2$

La recta es $y = 2(x + 1) - 2 = 2x$.

44 **Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt{x+1}$ en $x = 0$.**

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$; $m = y'(0) = \dfrac{1}{2}$, $y(0) = 1$

La recta es $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

45 **La tasa de variación media de una función $f(x)$ en el intervalo $[3, 3 + h]$ es igual a $\dfrac{2 - 3h}{h + 1}$. ¿Cuál es el crecimiento de esa función en $x = 3$?**

$f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2 - 3h}{h + 1} = 2$

46 **Escribe las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ que sean paralelas a la recta $6x - y + 10 = 0$.**

☛ ***La pendiente de la recta es el coeficiente de x cuando la y está despejada.***

$y' = 3x^2 - 3 = 6 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

Rectas: $y = 6\left(x + \sqrt{3}\right)$, $y = 6\left(x - \sqrt{3}\right)$

47 **Escribe las ecuaciones de las tangentes a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.**

Puntos de corte con el eje de abscisas: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 2$, $x = -2$

Puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

$$y' = -2x, \quad y'(2) = -4, \quad y'(-2) = 4$$

Las rectas son:
- En $x = -2 \rightarrow y = 4x + 8$
- En $x = 2 \rightarrow y = -4x + 8$

Página 190

48 **Halla los puntos de tangente horizontal de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.**

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = -1$, $x = 3$.

Puntos $(-1, 4)$ y $(3, -28)$.

49 **¿En qué puntos de $y = 1/x$ la tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante? ¿Existe algún punto de tangente horizontal en esa función?**

$y' = -\dfrac{1}{x^2} = -1 \Rightarrow x = -1$, $x = 1$. Puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

No existe ningún punto tangente horizontal, pues $y' = \dfrac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución.

50 **a) ¿Cuál es la derivada de $y = 2x - 8$ en cualquier punto?**

b) ¿Cuánto ha de valer x para que la derivada de $y = x^2 - 6x + 5$ sea igual a 2?

c) ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 6x + 5$ es paralela a la recta $y = 2x + 8$?

a) $y' = 2$

b) $y' = 2x - 6 = 2 \Rightarrow x = 4$

c) $y' = 2x - 6 = 2 \Rightarrow x = 4$. En el punto $(4, -3)$.

51 **¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene la pendiente igual a 8?**

$y' = 3x^2 - 4 = 8 \Rightarrow x = -2, \ x = 2$

Puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

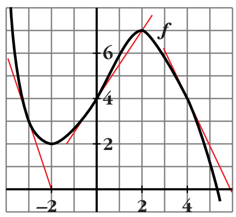
52 **Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas a la recta $2x + y = 0$.**

$y' = \dfrac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} = -2 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow x = 0, \ x = 2$

En $(0, 0) \rightarrow y = -2x$

En $(2, 4) \rightarrow y = -2(x-2) + 4 = -2x + 8$

53 **Halla f' en los puntos de abscisas –3, 0 y 4.**



Halla las pendientes de las tangentes trazadas en esos puntos.

$f'(-3) = -3, \quad f'(0) = \dfrac{3}{2}, \quad f'(4) = -2$

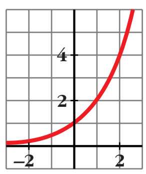
54 **Indica, en la gráfica del ejercicio anterior, los puntos en los que la derivada es cero.**

En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?

$f'(x) = 0$ en $(-2, 2)$ y en $(2, 7)$.

En $x = 1$ la derivada es positiva. En $x = 3$ es negativa.

55 **¿Existe algún punto en esta función en el que la derivada sea negativa?**



Compara los valores de $f'(-2)$, $f'(2)$ y $f'(0)$.

No, pues es creciente.

$f'(-2) < f'(0) < f'(2)$

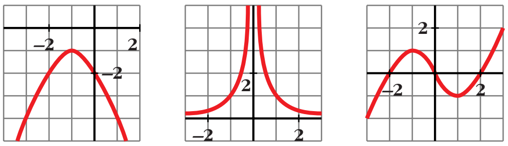
56 **La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?**

☛ ***Halla la pendiente de esa recta y ten en cuenta su relación con la derivada.***

La recta tangente es $y = \dfrac{4x+1}{3}$; su pendiente es $\dfrac{4}{3} = f'(2)$.

$f(2) = 3$

57 **Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa.**



☛ ***Observa su crecimiento y decrecimiento. La primera crece si $x < -1$.***

a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

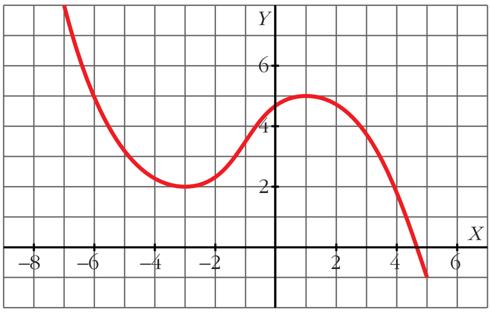
c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

58 **Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos:**

- **Es continua.**
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- **Tiene tangente horizontal en (–3, 2) y en (1, 5).**

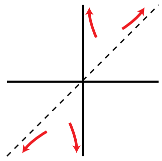
Indica si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.



(–3, 2) es un mínimo.

(1, 5) es un máximo.

62 **Comprueba que la función $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ tiene dos puntos de tangente horizontal, (–1, –2) y (1, 2); sus asíntotas son $x = 0$ e $y = x$ y la posición de la curva respecto de las asíntotas es la de la derecha. Represéntala.**



$$y = x + \frac{1}{x}$$

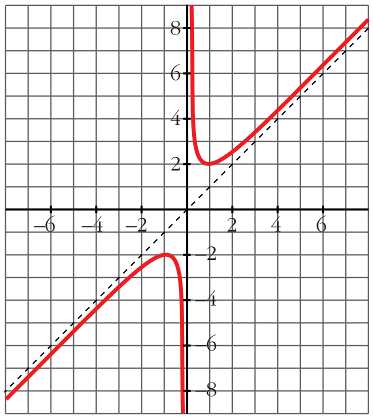
$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -1, \ x = 1$$

Puntos (–1, –2) y (1, 2).

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

Asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota oblicua en $y = x$.



Página 191

63 **Comprueba que la función $y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$:**

- **Tiene derivada nula en (0, 0).**
- **La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.**
- **Posición de la curva respecto a la asíntota:**

  Si $x \to -\infty$, $y < 2$

  Si $x \to +\infty$, $y < 2$

Represéntala.

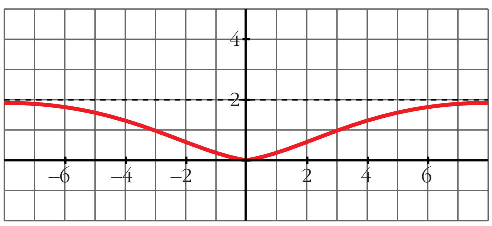
- $y'(x) = \frac{4x(x^2 + 1) - 2x(2x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

  $y'(0) = 0; \quad y(0) = 0$

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} =$

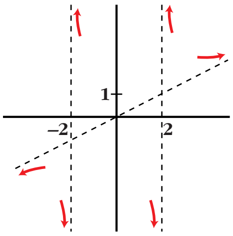
  $= 2 \begin{cases} \text{si } x \to -\infty, & y < 2 \\ \text{si } x \to +\infty, & y < 2 \end{cases}$

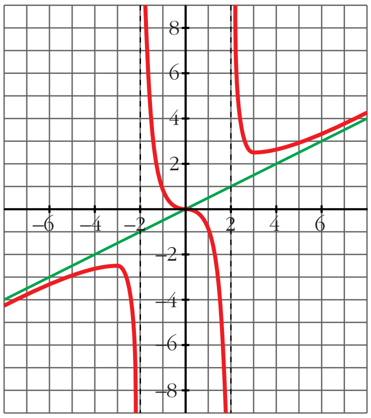


64 **Completa la gráfica de una función de la que sabemos que tiene tres puntos de tangente horizontal:**

$$\left(-3, -\frac{5}{2}\right) \quad (0, 0) \quad \text{y} \quad \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

y que sus ramas infinitas son las representadas.





65 **En cada una de las siguientes funciones, halla los puntos de tangente horizontal y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos.**

Represéntalas:

a) $y = x^3 - 3x^2$ **b)** $y = x^3 - 3x + 2$

c) $y = x^4 + 4x^3$ **d)** $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

e) $y = 12x - x^3$ **f)** $y = -x^4 + x^2$

g) $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$ **h)** $y = x^4 - 8x^2 + 2$

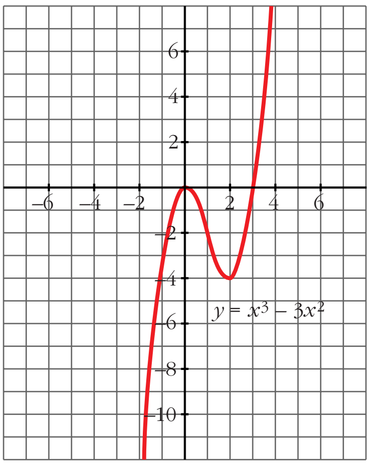
a) $y' = 3x^2 - 6x$

$y'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 0 \;\rightarrow\; (0, 0) \\ x = 2 \;\rightarrow\; f(2) = -4 \;\rightarrow\; (2, -4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$$



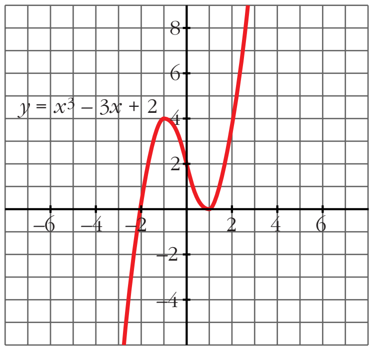
b) $y' = 3x^2 - 3$

$y'(x) = 0 \iff x = \pm 1$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \rightarrow (1,\ 0) \\ f(-1) = 4 \rightarrow (-1,\ 4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$$

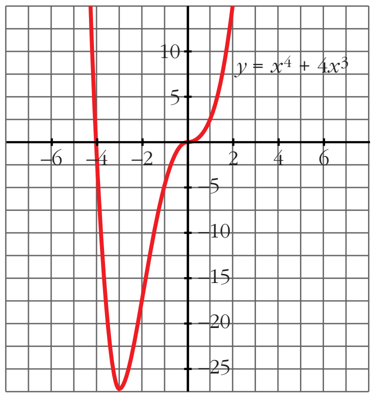


c) $y' = 4x^3 + 12x^2$

$y'(x) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0,\ 0) \\ x = -3 \rightarrow f(-3) = -27 \rightarrow (-3,\ -27) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 4x^3) = \lim_{x \to +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$$



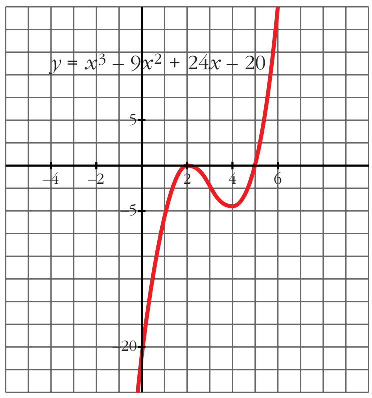
d) $y' = 3x^2 - 18x + 24; \quad y'(x) = 0 \iff$

$$\iff x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(4) = -4 \rightarrow (4,\ -4) \\ f(2) = 0 \rightarrow (2,\ 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 9x^2 + 24x - 20) = +\infty$$

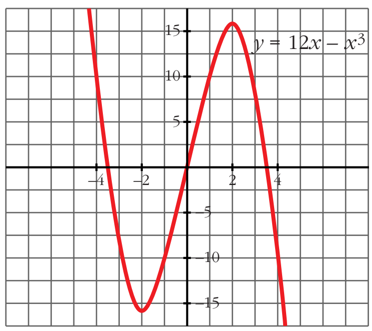


e) $y' = 12 - 3x^2; \quad y'(x) = 0 \iff x = \pm 2$

$$\begin{cases} f(2) = 16 \rightarrow (2,\ 16) \\ f(-2) = -16 \rightarrow (-2,\ -16) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (12x - x^3) = +\infty$$

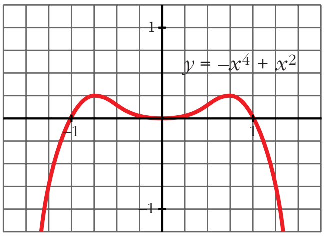
$$\lim_{x \to +\infty} (12x - x^3) = -\infty$$



f) $y'(x) = -4x^3 + 2x; \quad y'(x) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \to f(0) = 0 \to (0, 0) \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \to f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{4} \to \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{4}\right) \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \to f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{4} \to \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty$$

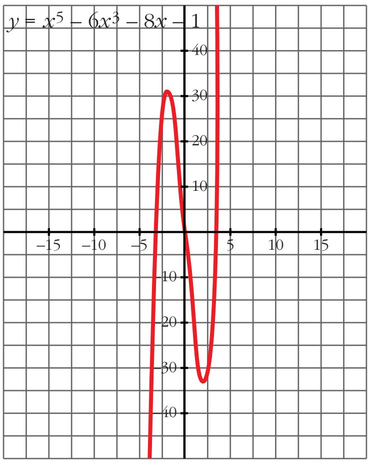


g) $y' = 5x^4 - 18x^2 - 8; \quad y'(x) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} x = 2 \to f(2) = -33 \to (2, -33) \\ x = -2 \to f(-2) = 31 \to (-2, 31) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$$

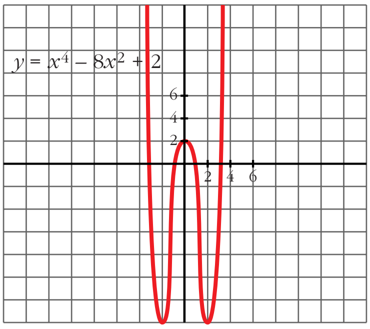


h) $y' = 4x^3 - 16x; \quad y'(x) = 0 \iff$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \to f(0) = 2 \to (0, 2) \\ x = 2 \to f(2) = -14 \to (2, -14) \\ x = -2 \to f(-2) = -14 \to (-2, -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = -\infty$$



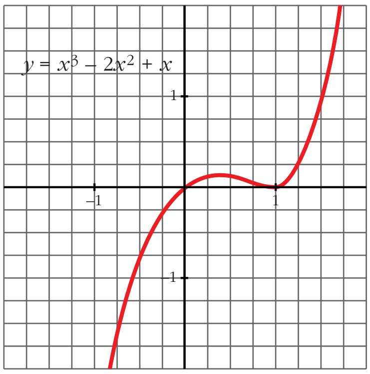
66 **Representa estas funciones hallando los puntos de tangente horizontal y estudiando sus ramas infinitas:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x$ **b)** $y = -x^4 + 2x^2$

c) $y = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 4}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

e) $y = \dfrac{x}{(x + 5)^2}$ **f)** $y = \dfrac{2x^2}{x + 2}$

a) $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3},\ \ x = 1$



Puntos de tangente horizontal:

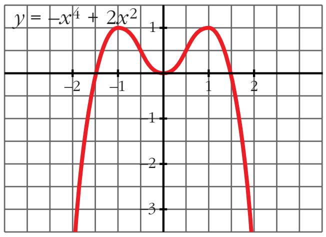
$$\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right), (1, 0)$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = -\infty$$

b) $y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0,\ \ x = 1,\ \ x = -1$



Puntos de tangente horizontal:

$(-1, 1)$, $(0, 0)$ y $(1, 1)$

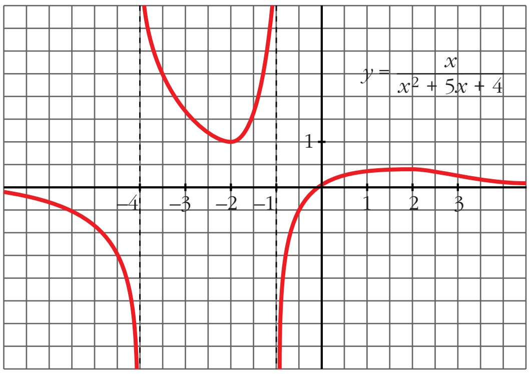
$$\lim_{x \to +\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$

c) $y' = \dfrac{x^2 + 5x + 4 - x(2x + 5)}{(x^2 + 5x + 4)^2} = \dfrac{-x^2 + 4}{(x^2 + 5x + 4)^2} = 0 \Rightarrow x = 2,\ \ x = -2$

Puntos de tangente horizontal:

$$(-2, 1), \left(2, \frac{1}{9}\right)$$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 5x + 4} = 0$$

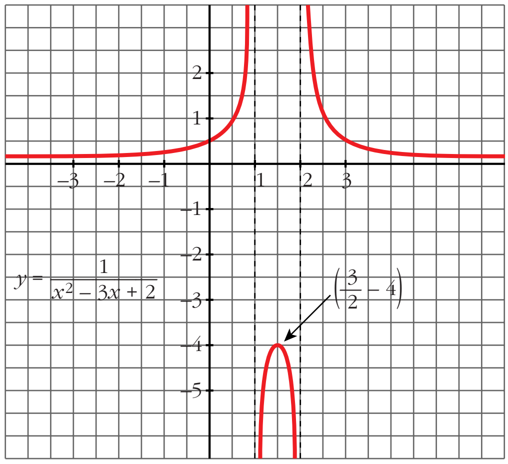
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 + 5x + 4} = 0$$

d) $y' = \dfrac{-(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Puntos de tangente horizontal: $\left(\dfrac{3}{2}, -4\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = 0$$

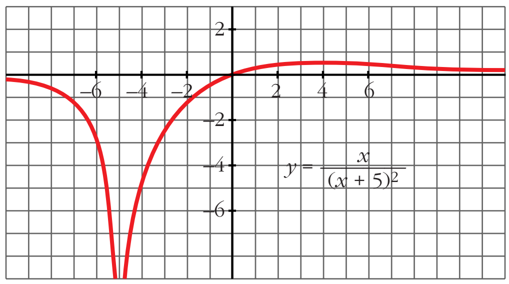


e) $y' = \dfrac{(x+5)^2 - x \cdot 2(x+5)}{(x+5)^4} =$

$= \dfrac{5 - x}{(x+5)^3} = 0 \ \Rightarrow \ x = 5$

Puntos de tangente horizontal:

$$\left(5, \frac{1}{20}\right)$$



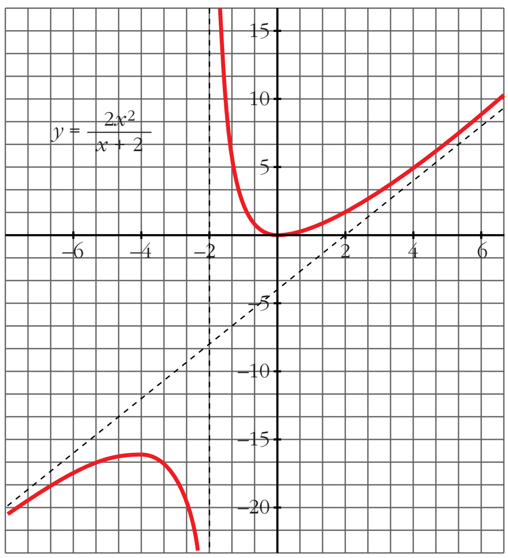
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x+5)^2} = 0; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{(x+5)^2} = 0$$

f) $y' = \dfrac{4x(x+2) - 2x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2} = \dfrac{2x(x+4)}{(x+2)^2} = 0 \ \Rightarrow \ x = 0, \ \ x = -4$

Puntos de tangente horizontal:

$$(-4, -16), \ (0, 0)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x+2} = 2x - 4$$



67 **Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Represéntalas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:**

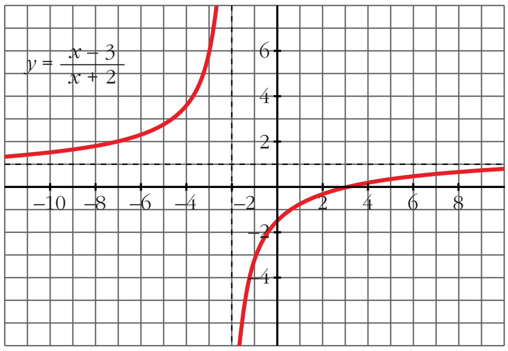
a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$

c) $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$ **d)** $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

a) Los puntos de corte son:

$\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3, 0)$

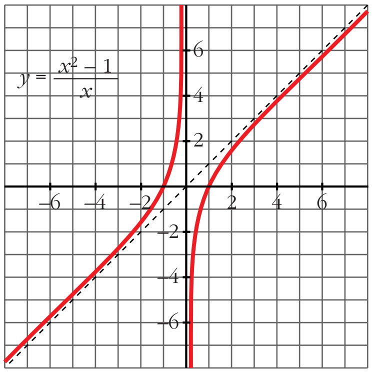
$y' = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$



b) Los puntos de corte son:

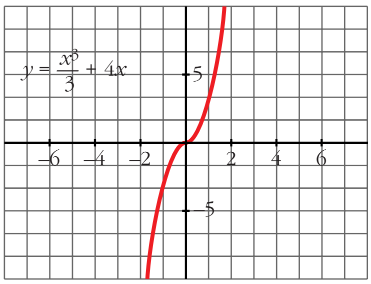
$(1, 0)$, $(-1, 0)$

$y' = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$



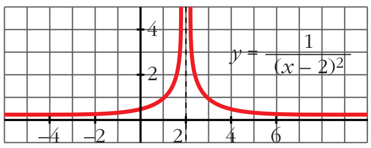
c) El punto de corte es: $(0, 0)$

$y' = x^2 + 4 \neq 0$



d) El punto de corte es: $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$

$y' = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$



68 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$

b) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

c) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

d) $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x + 2}$

e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

f) $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

g) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$

h) $y = \dfrac{x^2}{(x - 2)^2}$

i) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

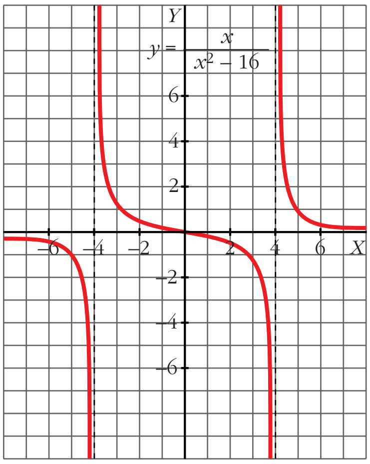
j) $y = \dfrac{x^2 - 5}{2x - 4}$

a) $y' = \dfrac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asíntotas verticales: $x = -4$, $x = 4$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

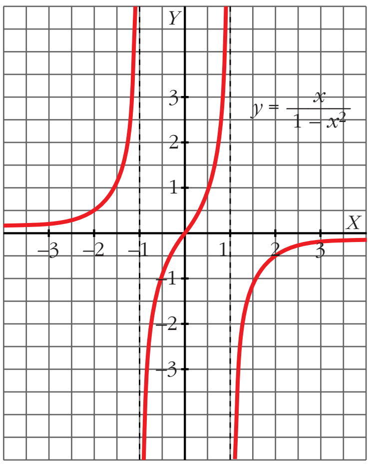


b) $y' = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



c) $y' = \dfrac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 - 6x + 5)^2}$

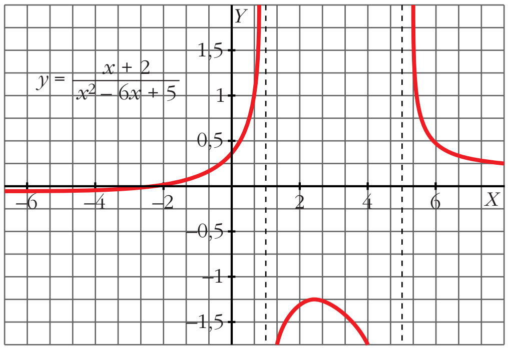
Asíntotas verticales: $x = 5$, $x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

$(-6{,}58; -0{,}052)$, $(2{,}58; -1{,}197)$



d) $y' = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x + 2)^2}$

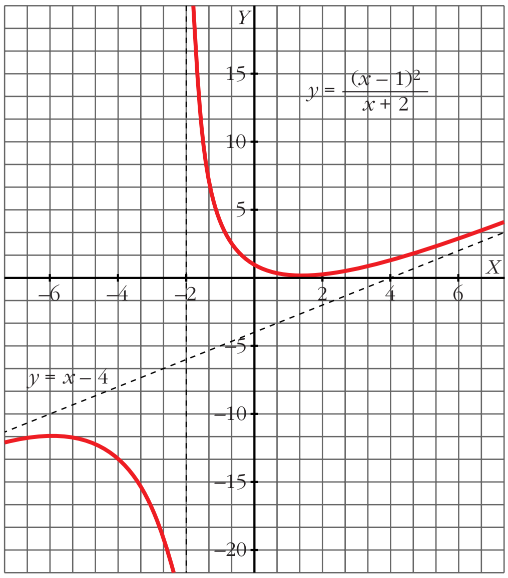
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(1, 0)$, $(-5, -12)$



e) $y' = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$

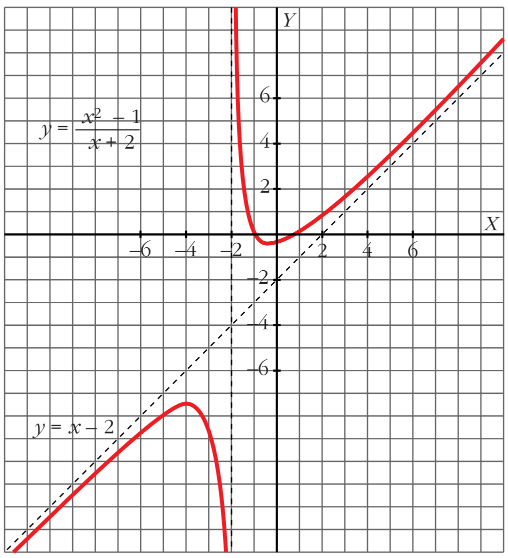
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 2$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

$(-0{,}26; -0{,}54)$, $(-3{,}73; -7{,}46)$



f) $y' = \dfrac{2x}{(1 - x^2)^2}$

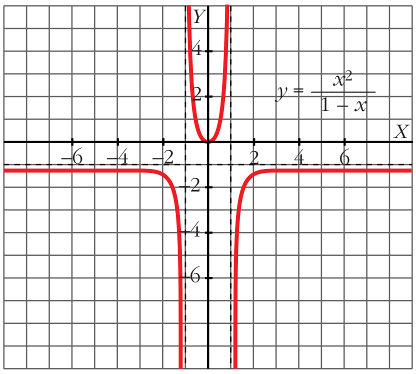
Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = -1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(0, 0)$



g) $y' = \dfrac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

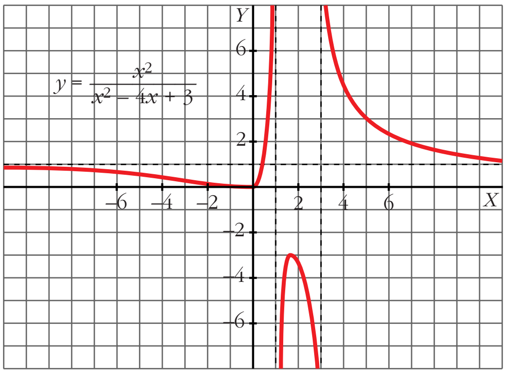
Asíntotas verticales: $x = 3$, $x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(0, 0)$, $\left(\dfrac{3}{2}, -3\right)$



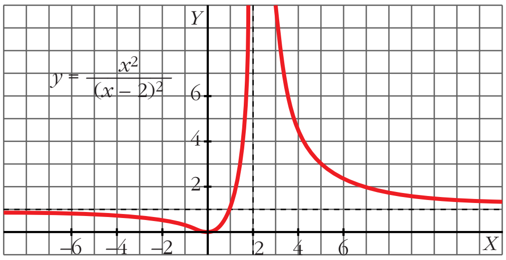
h) $y' = 2\left(\dfrac{x}{x - 2}\right)^2 \cdot \dfrac{-2}{(x - 2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son: $(0, 0)$



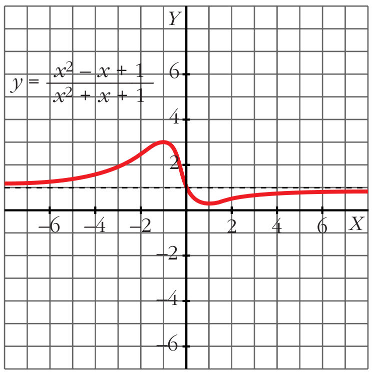
i) $y' = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$, $(-1, 3)$



77 **Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 3x^3 - 18x + 1$.**

$f'(x) = 9x^2 - 18 = 9(x^2 - 2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$

$f'(x) > 0$ en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \to f(x)$ es creciente

$f'(x) < 0$ en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \to f(x)$ es decreciente

78 **Estudia el crecimiento y el decrecimiento de estas funciones analizando el signo de su derivada:**

a) $y = \dfrac{x-3}{5}$ **b)** $y = x^2 - 5x + 3$

c) $y = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{4}$ **d)** $y = 1 + 2x - x^2$

e) $y = x^3$ **f)** $y = (x + 1)^4$

g) $y = (2 - x)^5$

a) $y' = \dfrac{1}{5}$. Creciente para todo x.

b) $y' = 2x - 5$. Decrece en $\left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$ y crece en $\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

c) $y' = \dfrac{3x-1}{2}$. Decrece en $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right)$ y crece en $\left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.

d) $y' = 2 - 2x$. Crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.

e) $y' = 3x^2$. Creciente para todo $x \neq 0$.

f) $y' = 4(x + 1)^3$. Decrece en $(-\infty, -1)$ y crece en $(-1, +\infty)$.

g) $y' = -5(2 - x)^4$. Decreciente para todo $x \neq 2$.

CUESTIONES TEÓRICAS

79 **Calcula la T.V.M. de $f(x) = 3x - 2$ en los intervalos $[-1, 2]$, $[1, 3]$ y $[-3, 4]$. Justifica por qué obtienes el mismo resultado.**

T.V.M. $[-1, 2] = \dfrac{4 + 5}{3} = 3$

T.V.M. $[1, 3] = \dfrac{7 - 1}{2} = 3$

T.V.M. $[-3, 4] = \dfrac{10 + 11}{7} = 3$

T.V.M. $= 3$ para todos. La función es una recta de pendiente 3.

96 **Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$, en miles de euros, viene dada en función de la cantidad que se invierte, x, en miles de euros, por medio de la siguiente expresión:**

$$R(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}04x + 3{,}5$$

a) ¿Qué cantidad de dinero se debe invertir para obtener la máxima rentabilidad?

b) ¿Qué rentabilidad se obtendrá?

a) $R'(x) = -0{,}002x + 0{,}04 = 0 \Rightarrow x = 20$

Se deben invertir 20 000 €.

b) $R(20) = 3{,}9$

Se obtendrán 3 900 € de rentabilidad.

97 **El coste total de fabricación de q unidades de cierto artículo es:**

$$C(q) = 3q^2 + 5q + 75 \text{ dólares}$$

El coste medio por unidad es $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

a) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?

b) Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que has hallado en el apartado a).

a) $M(q) = \dfrac{3q^2 + 5q + 75}{q}$

$$M' = \frac{(6q+5)q - (3q^2 + 5q + 75)}{q^2} = \frac{6q^2 + 5q - 3q^2 - 5q - 75}{q^2} =$$

$$= \frac{3q^2 - 75}{q^2} = 0 \Rightarrow q^2 = 25 \Rightarrow q = 5 \text{ unidades}$$

Se deben fabricar 5 unidades.

b) $C(5) = 175$; $M(5) = 35$

98 **La función $f(x) = \dfrac{60x}{x^2 + 9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en años, $x = 0$ indica el momento de constitución de la empresa).**

a) Haz una representación gráfica aproximada de la función teniendo en cuenta el dominio válido en el contexto del problema.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento? ¿Es posible que llegue un momento en que no obtenga beneficios ni pérdidas? Razona la respuesta.