Aplicaciones de la primera y segunda derivada

Conociendo los puntos por los que pasa **una función polinómica**, o dónde alcanza sus extremos relativos, es decir, máximos, mínimos y puntos de inflexión, podemos **determinar los coeficientes** del que la definen, o bien, ajustar su valor para que alcance determinados valores. Si utilizamos la primera y la segunda derivada de la función, que tener en cuenta que:

- Si $f(x)$ pasa por el punto (a, b) entonces $f(a) = b$
- Si $f(x)$ pasa por el punto (a, b), es decir, $f(a) = b$, y se cumple que $f'(a) = 0$, y $f''(a) < 0$, entonces $f(x)$ alcanza un máximo relativo en el punto (a, b).
- Si $f(x)$ pasa por el punto (a, b), es decir, $f(a) = b$, y se cumple que $f'(a) = 0$, y $f''(a) > 0$, entonces $f(x)$ alcanza un mínimo relativo en el punto (a, b).
- Si f(x) pasa por el punto (a, b), es decir, $f(a) = b$, y se cumple $f''(a)=0$, y $f'''(a)$ *es distinto de 0,* entonces $f(x)$ alcanza un punto de inflexión en el punto (a, b).

Para hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, se calcula $f'(a)$, y se puede proceder de dos formas:

1.º Considerando la ecuación de la recta en su forma explícita se cumple que:

$$f(x) = mx + n \qquad f'(a) = m \qquad f(a) = ma + n$$

2.º Considerando la ecuación de la recta en su forma punto-pendiente:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

1. Determina los coeficientes a y b en la función $f(x) = ax^2 + bx$, teniendo en cuenta que alcanza un máximo relativo en el punto $P(-1, 2)$.

2. Determina los coeficientes k, m y n en la función $f(x) = kx^2 + mx + n$, teniendo en cuenta que alcanza un mínimo relativo en el punto $P(3, -1)$ y que pasa por el punto (0, 0).

3. Calcula la expresión de la función conociendo que:

- **Es un polinomio de grado 3.**
- **No tiene término independiente.**
- **Tiene un punto de inflexión en (1,1).**

4. Halla la expresión de la recta tangente a la función $f(x) = -5x^2 + 4x - 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

5. ¿Se pueden determinar exactamente el valor de los coeficientes en la función $f(x) = ax^6 + b$ para que la recta $y = 1$ sea su tangente en el punto de abscisa $x = 0$.