Cálculo de límites

Al calcular el **límite de una función cuando *x* tiende a un valor** podemos encontrar siete tipos de indeterminaciones. Veamos cómo resolver algunas de ellas según cómo sea la expresión de la tomamos límite:

1) Cociente de polinomios:

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$: Dividimos cada término por la potencia de mayor grado, en este caso, x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+7}{2x^2+10x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{10x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}{2+\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{3-\frac{1}{\infty}+\frac{7}{\infty}}{2+\frac{10}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{3-0+0}{2+0+0}=\frac{3}{2}$$

También podemos llegar a este resultado comparando los grados del polinomio del numerador y del denominador.

- Si el grado del polinomio del numerador es igual que el del denominador el límite es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado.
- Si el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador, el límite es $+\infty$, o $-\infty$.
- Si el grado del polinomio del numerador es menor que el del denominador, el límitee es cero.

Indeterminación $\frac{0}{0}$: El valor al que tiende la *x* es raíz de ambos polinomios, por eso ambos se anulan al sustituir la *x*. Descomponemos ambos polinomios y simplificamos.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-3x-6}{x^2-4}=\frac{3\cdot 2^2-3\cdot 2-6}{2^2-4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x+1)}{(x+2)}=\frac{3\cdot 3}{5}=\frac{9}{5}$$

Indeterminación $\infty-\infty$**:** Se efectúa la operación y se calcula el nuevo límite que aparece.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-2}=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)-x^2}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2-x^2}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+2}{x^2-2x}=\frac{\infty}{\infty}=0$$

2) Cuando aparecen radicales:

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$**:** Se observa el grado de los polinomios que están en el radicando y se aplica la misma regla que hemos utilizado en el cociente de polinomios.

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5x^2+6x-1}}{2x-3}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ El polinomio del numerador tiene grado 2, pero como está afectado por la raíz cuadrada equivale a un polinomio de grado 1. El grado del polinomio del denominador es 1 también, así que el límite es el cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado de ambos polinomios.

Indeterminación $\frac{0}{0}$ **e indeterminación** $\infty-\infty$**:** Se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado de la cantidad.

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1}=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-3}-\sqrt{x+1})\cdot(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x+1}}=\frac{-2}{\infty}=0$$

1. Calcula el valor de los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-4x^2+8x-1}{2x^3-9x+8}$ **c)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x+5}$ **e)** $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ **g)** $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x+1}-1}$ **i)** $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^2+x-1}{2x^2-3x+1}$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+7}{4x^2+3x}$ **d)** $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+x^2+1}}{-x}$ **f)** $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x^2-5x-6}$ **h)** $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-3}-\frac{4}{x+3}\right)$ **j)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$