Método de mínimos cuadrados

En el estudio de las relaciones entre variables a partir de datos experimentales, deben tenerse en cuenta los errores que afectan a los diferentes datos. Una forma muy práctica de abordar este problema es mediante el **método de mínimos cuadrados**.

Por ejemplo, se pretende investigar la relación existente entre la fuerza F aplicada al extremo de un dinamómetro y el alargamiento ΔL producido. Como resultado de diversas medidas, se ha obtenido la tabla de datos experimentales del margen.

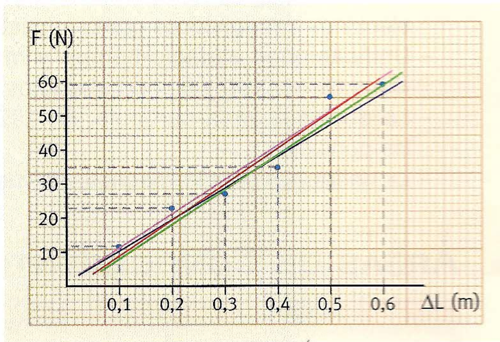
ΔL (m)	F(N)
0,1	13
0,2	23
0,3	27
0,4	35
0,5	55
0,6	59

La representación gráfica de los datos permite intuir una relación lineal entre estas variables F y ΔL. Pero, de las posibles rectas que pasan entre el conjunto de puntos, ¿cuál es la "recta ideal" que mejor representa la relación entre las variables?

Como los datos experimentales contienen errores, la diferencia de ordenadas entre cada punto (que representa al dato) y la "recta ideal", representa el **error del dato experimental**.

El criterio que se adopta en estos casos es considerar que la recta que mejor se ajusta a los datos cumple la siguiente propiedad:

POSIBLES RECTAS QUE SE AJUSTAN A LOS DATOS



> Por el criterio de **mínimos cuadrados**, el valor de la suma de los cuadrados de las diferencias de ordenadas entre los puntos experimentales y la recta ideal debe ser el más pequeño entre los posibles.

Para un conjunto de N valores experimentales, representados como puntos del plano $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)\}$, la función ideal que mejor relaciona las variables x_i e y_i, ajustada mediante el criterio de mínimos cuadrados, es $\mathbf{y = a + bx}$ siendo los valores a y b los siguientes:

$$a = \frac{\sum y_i - b\sum x_i}{N} \qquad b = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

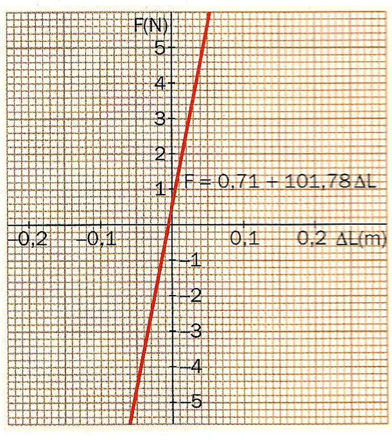
EJERCICIO RESUELTO

2 **Con los datos de la tabla determina la relación del tipo $F = a + b\,\Delta L$ entre la fuerza aplicada al muelle y el alargamiento producido.**

Se realizan los cálculos estadísticos intermedios necesarios para obtener a y b.

ΔL (m)	F_i (N)	ΔL_i^2	$\Delta L_i\, F_i$
0,1	13	0,01	1,3
0,2	18	0,04	3,6
0,3	33	0,09	9,9
0,4	42	0,16	16,8
0,5	47	0,25	23,5
0,6	65	0,36	39,0
0,7	72	0,49	50,4
$\Sigma\, \Delta L_i = 2{,}8$	$\Sigma\, F_i = 290$	$\Sigma\, \Delta L_i^2 = 1{,}4$	$\Sigma\, (\Delta L_i\, F_i) = 144{,}5$

$$a = \frac{290 - 101{,}78 \cdot 2{,}8}{7} = 0{,}71 \qquad b = \frac{7 \cdot 144{,}5 - 2{,}8 \cdot 290}{7 \cdot 1{,}4 - 2{,}8^2} = 101{,}78$$



La relación buscada es $F = 0{,}71 + 101{,}78\, \Delta L$. Esta relación, denominada también recta de regresión, permite estimar el valor más probable de la fuerza que produce un alargamiento dado.