# *ANÁLISIS VECTORIAL EN EL PLANO*

## 1 VECTORES Y ESCALARES:

**Escalar:** Magnitud que puede especificarse por un número real (temperatura, volumen, etc.).

**Vector:** Magnitud que, para su determinación, exige el conocimiento de un módulo, una dirección y un sentido (velocidad, fuerza, etc.).

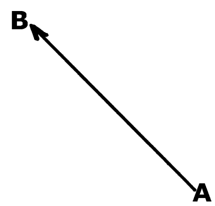
**Módulo:** Longitud del vector respecto de la unidad de medida elegida. Siempre es un número real positivo.

**Dirección:** Recta sobre la que se apoya el vector. Queda definida por el ángulo que forma el vector con una recta de referencia del plano, generalmente el eje 0x.

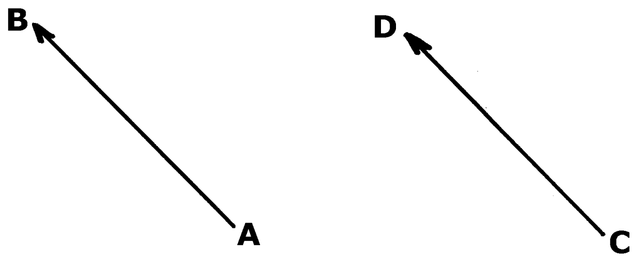
**Sentido:** Lugar hacia el que señala la flecha vector.

## 2 VECTORES FIJOS Y VECTORES LIBRES:

**Vector Fijo:** Es un segmento orientado que tiene su origen en un punto A y su extremo en un punto B, fijos en el plano.




**Vectores Fijos Equipolentes:** Dos vectores fijos no nulos son equipolentes si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.




Al conjunto de todos los vectores fijos del plano lo denotamos $F^2$ , donde el exponente hace referencia a la *bidimensionalidad* del plano. La equipolencia es una *relación de equivalencia* entre los vectores fijos del plano; todos los vectores equipolentes a uno dado (infinitos) forman lo que llamamos una *clase de equivalencia* (equipolencia en este caso).

**Vector Libre:** Es cada una de las clases de equivalencia -o equipolencia- en que queda clasificado el conjunto $F^2$ mediante la *relación de equipolencia.*

En la práctica trabajamos con vectores fijos que son representantes de su *clasedeequipolencia,* es decir, del vector libre correspondiente. El módulo, la dirección y el sentido de un vector libre son los de uno cualquiera de sus representeantes.

# 3 NOTACIÓN VECTORIAL:

Un **vector fijo** se denota escribiendo las letras correspondientes al **origen** (punto inicial de la flecha) y al **extremo** (punto final) con una flecha encima, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Un **vector libre** se denota normalmente por medio de una letra minúscula con una flecha encima, $\vec{a}$, o bien encerrando entre corchetes el nombre de alguno de sus representantes (poco usual), [$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ].

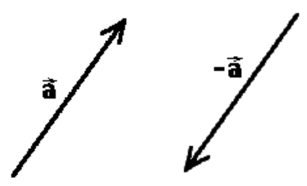
El **módulo** de un vector se representa por $\left|\vec{a}\right|$ , o bien $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ ; también se utiliza el nombre del vector sin flecha encima.

En muchos textos las magnitudes vectoriales se indican con letras en negrita.

# 4 DEFINICIONES FUNDAMENTALES:

## 4.1 Vectores opuestos:

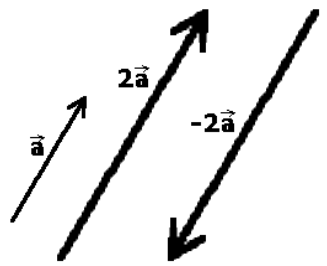
Dos vectores son opuestos el uno del otro si tienen el mismo módulo y la misma dirección, pero sentidos contrarios.




## 4.2 Producto de un Escalar por un Vector:

Sea K un escalar y $\vec{a}$ un vector, entonces K$\vec{a}$ es un vector cuyo módulo es $|K|$ veces el de $\vec{a}$, $\left|K\vec{a}\right| = |K| \cdot \left|\vec{a}\right|$ , cuya dirección es la de $\vec{a}$, y cuyo sentido es el mismo o contrario al de $\vec{a}$ según sea K>0 o K<0.

Si K=0 $\Rightarrow$ K$\vec{a} = \vec{0}$



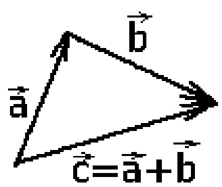

## 4.3 Vector Cero o Nulo:

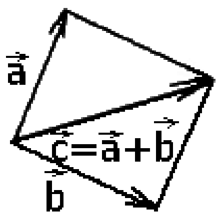
$\vec{0}$, vector que comienza y termina en el mismo punto, es decir, cuyos origen y extremo son el mismo punto.

$$\left|\vec{0}\right| = 0$$

## 4.4 Suma de vectores:

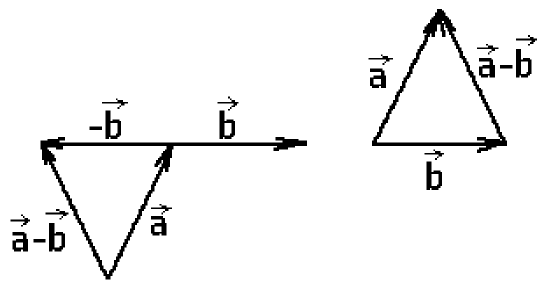
La **suma** o **resultante** de dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ , es un vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ que se construye haciendo coincidir el origen de $\vec{b}$ con el extremo de $\vec{a}$ , y uniendo a continuación el origen de $\vec{a}$ con el extremo de $\vec{b}$ . Esta definición es equivalente a la regla del paralelogramo para la adición de vectores.



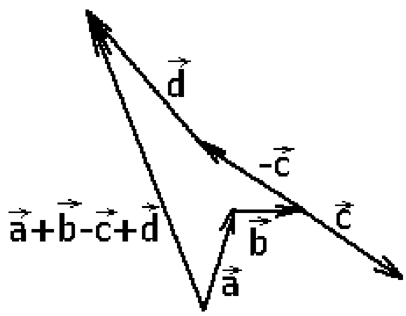




## 4.5 Diferencia de vectores:

El vector **diferencia**,$\vec{a} - \vec{b}$, se define mediante la suma de vectores, como $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$ . También se obtiene el vector $\vec{a} - \vec{b}$ uniendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ por sus orígenes para, a continuación, unir el extremo de $\vec{b}$ con el de $\vec{a}$.




Las definiciones de suma y diferencia de vectores pueden aplicarse a más de dos vectores.




## 4.6 Vectores Unitarios:

Son vectores cuyo módulo es igual a la unidad de medida elegida, $\vec{u}$ / $\left|\vec{u}\right| = 1$
.

Sea $\vec{a}$ un vector cualquiera con $\left|\vec{a}\right| \neq 1$ ; el vector $\overrightarrow{u_a} = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}$ es un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que $\vec{a}$ .

# 5 LEYES DEL ÁLGEBRA VECTORIAL:

Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son vectores y $\alpha, \beta$ son escalares (números reales), entonces:

## 5.1 Ley Conmutativa de la Suma:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

## 5.2 Ley Asociativa de la Suma:

$$\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$$

### 5.3 Ley Asociativa del Producto de Escalares y un Vector:

$$\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\vec{a}$$

### 5.4 Leyes Distributivas:

$$\left(\alpha+\beta\right)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$$

$$\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$$

## 6 DEPENDENCIA E INDEPENCIA LINEAL. BASES:

### 6.1 Dependencia e Independencia Lineal:

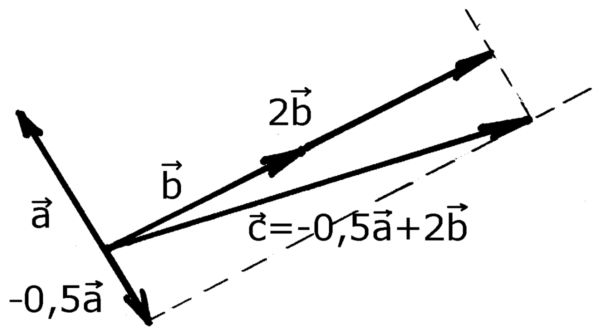
Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, vectores y $\alpha$, $\beta$, escalares (números reales), una **combinación lineal** de los dos vectores es una operación del tipo $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ (esto es extensible a cualquier número de vectores).

Decimos que **dos vectores son linealmente dependientes** si son proporcionales, es decir, si podemos expresar uno como el producto de un número por el otro y viceversa. En caso contrario decimos que los **dos vectores son linealmente independientes.** Por la definición del producto de un vector por un escalar podemos deducir que *dos vectores son linealmente dependientes si tienen la misma dirección y son linealmente independientes si tienen direcciones distintas*.

En general, de un **conjunto de vectores** decimos que son **linealmente dependientes** si podemos expresar uno de ellos como combinación lineal del resto; de no poder hacerlo decimos que los **vectores son linealmente independientes**. Debemos notar que en un cojunto de vectores linealmente dependientes, cualquiera de ellos podemos expresarlo como combinación lineal del resto:

Si $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ son linealmente dependientes, entonces existen dos números reales ,$\lambda$ *y* $\mu$, tales que $\vec{a}=\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$ , en consecuencia, $\vec{b}=\frac{1}{\lambda}\vec{a}-\frac{\mu}{\lambda}\vec{c}$ y $\vec{c}=\frac{1}{\mu}\vec{a}-\frac{\lambda}{\mu}\vec{b}$ .

En $V^2$ no podemos encontrar más de dos vectores linealmente independientes:

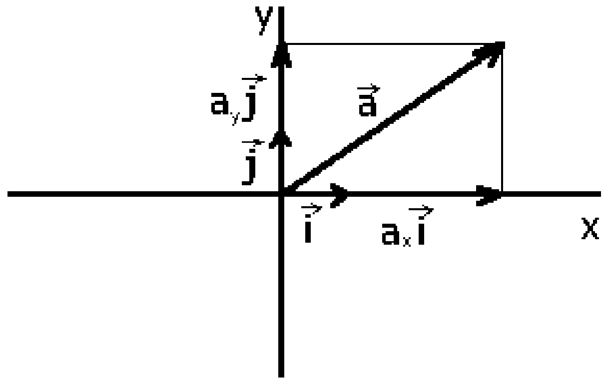



En la figura los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes por tener direcciones distintas; cualquier otro vector, $\vec{c}$, podemos dibujarlo como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sin más que trazar desde el extremo de $\vec{c}$ dos líneas paralelas a $\vec{a}$ y $\vec{b}$ hasta que corten a las prolongaciones de $\vec{b}$ (la paralela a $\vec{a}$) y $\vec{a}$ (la paralela a $\vec{b}$). La suma de los nuevos vectores así obtenidos, $2\vec{b}$ y $-0{,}5\vec{a}$ , da el vector $\vec{c}$.

## 6.2 Bases de $V^2$:

Cualquier pareja de vectores libres linealmente independientes forman una **base de** $V^2$, porque *a)* son linealmente independientes, y *b)* podemos expresar cualquier otro vector de $V^2$ como combinación lineal de ellos dos. Si los dos vectores que forman la base son perpendiculares, decimos que es una **base ortogonal**; si ambos vectores tienen módulo igual a uno, decimos que es una **base normada**; y si los dos vectores de la base son perpendiculares y tienen módulo igual a uno, decimos que se trata de una **base ortonormal.**

Sea **B=**$\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$ una base ortonormada, es decir, cuyos vectores son perpendiculares y tienen módulo igual a la unidad de medida, de ella decimos que es una **Base Canónica** de $V^2$ (es la más sencilla). Convencionalmente colocamos los vectores de la base canónica sobre los ejes cartesianos, orientados en el sentido positivo de los mismos ($\vec{i}$ sobre el eje 0x y $\vec{j}$ sobre el eje 0y), de tal forma que a cualquier vector libre del plano podemos asignarle sus **componentes cartesianas** sin más que colocarlo sobre el origen de coordenadas y dibujar sus proyecciones sobre los ejes.




$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

**Vectores componentes de $\vec{a}$**: son los vectores cuya resultante es $\vec{a}$: $a_x\vec{i}$ y $a_y\vec{j}$.

**Componentes de $\vec{a}$**: son los números reales $a_x$ y $a_y$.

Sea el conjunto $IR^2 \equiv IR \times IR$ el conjunto formado por todos los **pares de números reales** de la forma$(x,y)$, donde x es le **primera componente** del par, e y es la **segunda componente**. En $\mathrm{IR}^2$ podemos definir la **igualdad de pares de números reales**:

$$(x,y) = (x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

También podemos definir las siguientes operaciones en $\mathrm{IR}^2$:

**Suma de pares de números reales**: $(x,y) + (x',y') = (x + x',y + y')$

**Producto de un número real por un par de números reales**: $\alpha(x,y) = (\alpha x,\alpha y)$

*Entonces a cada vector libre del plano, $\vec{a}$, podemos hacerle corresponder de modo único el par de números reales $(a_x, a_y)$ -componentes del vector- y recíprocamente, a cada par de números reales podemos hacerle corresponder de modo único un vector libre del plano. Gracias a esta correspondencia biunívoca es posible traducir toda relación geométrica en $V^2$ en una relación algebraica en $IR^2$.*

Por lo tanto, un vector podemos escribirlo como suma de sus vectores componentes, o bien mediante sus componentes, de forma análoga a como se indican las coordenadas de un punto en el plano.

**Vector $\vec{u}$:** $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x,y)$

**Punto P:** $P(x,y)$

# 7 ALGEBRA VECTORIAL MEDIANTE COMPONENTES:

Sean $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x,y)$ y $\vec{b} = x'\vec{i} + y'\vec{j} = (x',y')$ dos vectores libres del plano (expresados como suma de sus vectores componentes y mediante sus componentes) y $\alpha$ un número real:

* $\vec{a} \pm \vec{b} = \left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) \pm \left(x'\vec{i} + y'\vec{j}\right) = \left(x \pm x'\right)\vec{i} + \left(y \pm y'\right)\vec{j}$

$\vec{a} \pm \vec{b} = (x,y) \pm (x',y') = (x \pm x', y \pm y')$

* $\alpha\vec{a} = \alpha\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) = \alpha x\vec{i} + \alpha y\vec{j}$

$\alpha\vec{a} = \alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$

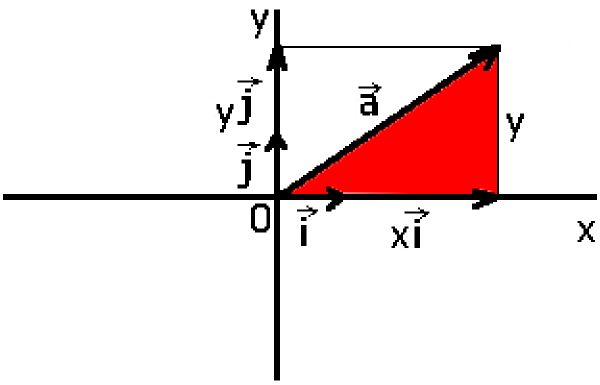
* $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

* $\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$

* $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} = (0,0)$

* Las leyes del álgebra vectorial vistas en la pregunta 5 son fácilmente demostrables utilizando la expresión de los vectores libres mediante sus vectores componentes y sus componentes; es éste un ejercicio muy recomendable para adquirir manejo en el cálculo vectorial.

* Módulo de $\vec{a}$, $\left|\vec{a}\right|$ :

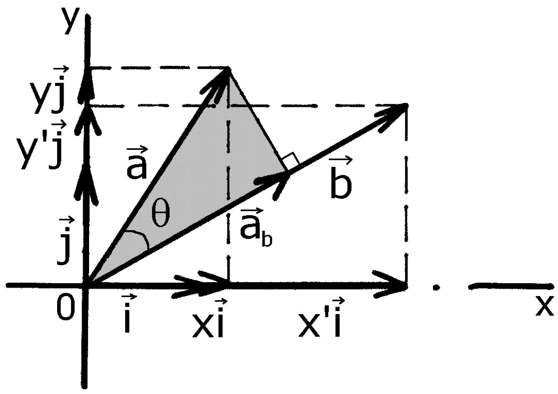



Como vemos en la figura, el vector $\vec{a}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos x e y. Aplicando el teorema de Pitágoras podemos expresar el módulo de $\vec{a}$ en función de sus componentes:

$$\left|\vec{a}\right| = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

# 8 PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES:

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores libres del plano, y sea $\theta$ el ángulo que forman entre sí, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$:




Definimos el **producto escalar** de dos vectores como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta}$$

Como muestra la figura, $\vec{a}_b$ es la proyección del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$. En el triángulo rectángulo sombreado vemos que $\cos\theta=\frac{\left|\vec{a}_b\right|}{\left|\vec{a}\right|}$, por lo que $\left|\vec{a}_b\right|=\left|\vec{a}\right|\cos\theta$. O sea que podemos *interpretar geométricamente el producto escalar* de $\vec{a}$ por $\vec{b}$ como el producto del módulo de la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ por el módulo de $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}_b\right|\left|\vec{b}\right|$$

## 8.1 Propiedades del producto escalar:

### 8.1.1 Propiedad conmutativa

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

### 8.1.2 Módulo de un vector

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0^o=\left|\vec{a}\right|^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\vec{a}\right| = +\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

## 8.1.3 Producto escalar nulo

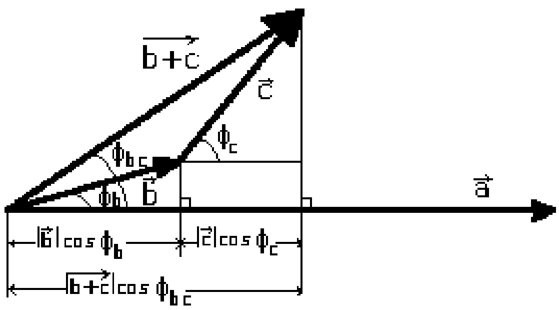
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \text{ si } \vec{a} = \vec{0},\ o\ \vec{b} = \vec{0}\ o\ \vec{a} \text{ es perpendicular } a\ \vec{b}$$

Esta propiedad deriva directamente de la definición de producto escalar.

## 8.1.4 Propiedad distributiva respecto a la suma de vectores

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

Para la demostración de esta propiedad hemos de construir una gráfica en la que aparezcan los tres vectores así como el vector suma de $\vec{b}$ y $\vec{c}$ junto con sus proyecciones sobre el vector $\vec{a}$:




En la figura $\phi_b$ es el ángulo formado entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$, $\phi_c$ el ángulo formado entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$ y $\phi_{\text{bc}}$ el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}+\vec{c}$. De la figura resulta evidente que

$$\left|\vec{b}+\vec{c}\right|\cos\phi_{\text{bc}} = \left|\vec{b}\right|\cos\phi_b + \left|\vec{c}\right|\cos\phi_c$$

Si multiplicamos a ambos lados del igual por el módulo de $\vec{a}$ obtenemos

$$\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}+\vec{c}\right|\cos\phi_{\text{bc}} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\phi_b + \left|\vec{a}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\phi_c$$

Pero si aplicamos la definición de producto escalar tenemos

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

cqd.

## 8.1.5 Propiedad homogénea

Si $\kappa$ es un número real, entonces

$$\kappa\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\kappa\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\kappa\vec{b}\right)$$

Esta propiedad es fácilmente demostrable sin más que aplicar la definición de producto escalar y las propiedades asociativa y conmutativa del producto de números reales (completar dicha demostración es un útil ejercicio por el manejo que implica de las propiedades nombradas).

## 8.2 Producto Escalar de los Vectores de la Base Canónica:

Recordemos que los vectores de la base canónica, $B=\left\{\vec{i},\vec{j}\right\}$, son unitarios y además perpendiculares entre sí.

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\left|\vec{i}\right|\left|\vec{i}\right|\cos 0^{o}=1$$

$$\vec{j}\cdot\vec{j}=\left|\vec{j}\right|\left|\vec{j}\right|\cos 0^{o}=1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\left|\vec{i}\right|\left|\vec{j}\right|\cos 90^{o}=0$$

$$\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{j}=0$$

## 8.3 Producto Escalar de Dos Vectores en Función de sus Componentes:

Sean los vectores $\vec{a}=(x,y)$ y $\vec{b}=(x',y')$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\cdot\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)$$

Si aplicamos la propiedad distributiva del producto escalar respecto a la suma de vectores:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x\vec{i}\cdot x'\vec{i}+x\vec{i}\cdot y'\vec{j}+y\vec{j}\cdot x'\vec{i}+y\vec{j}\cdot y'\vec{j}$$

Si aplicamos ahora la propiedad homogénea del producto escalar, obtenemos:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathrm{xx'}\,\vec{i}\cdot\vec{i}+\mathrm{xy'}\,\vec{i}\cdot\vec{j}+\mathrm{yx'}\,\vec{j}\cdot\vec{i}+\mathrm{yy'}\,\vec{j}\cdot\vec{j}$$

Que con los resultados obtenidos para el producto escalar de los vectores de la base canónica es igual a:

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=xx'+yy'}$$

Podemos darnos cuenta que esta forma de expresar el producto escalar de dos vectores es en general muy útil; por ejemplo, nos sirve para confirmar la expresión del módulo de un vector en función de sus componentes:

Si $\vec{a} = (x,y)$ se cumple que $\left|\vec{a}\right| = +\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = +\sqrt{\mathrm{xx}+\mathrm{yy}} = +\sqrt{x^2+y^2}$

## 8.4 Cálculo del Ángulo Formado por Dos Vectores:

Sean los vectores $\vec{u} = (x,y)$ y $\vec{v} = (x',y')$, su producto escalar lo podemos calcular de dos formas diferentes:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \mathrm{xx}' + \mathrm{yy}'$$

Si en la primera de las ecuaciones despejamos el coseno del ángulo formado por los dos vectores y después sustituimos el producto escalar por su expresión en función de las componentes de los vectores, obtenemos las siguientes igualdades:

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Donde hemos escrito el módulo de los vectores en función de sus componentes.