REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Santiago Cobreros Rico

Estudiaremos someramente, aunque paso a paso las propiedades de los distintos tipos de funciones encaminadas a la obtención de la representación gráfica de dichas funciones. Comenzaremos con las propiedades que pueden obtenerse directamente de la fórmula de la función y en segundo lugar veremos las que podemos calcular mediante las derivadas sucesivas de la función. No debemos olvidar que el objetivo final es dibujar la gráfica de la función. "*En una función real de variable real*, $f(x)$, *la gráfica es el conjunto de los pares* (x, y) *de* IR^2 *tales que* x *está en el dominio de* f *e* $y = f(x)$. *Para muchas de las funciones más habituales*, *ese conjunto de puntos constituye una curva de un tipo específico -quizás con varias componentes- que puede dibujarse en el plano*. *Normalmente se entiende por gráfica de la función esa curva*, *de ecuación* $y = f(x)$." (Diccionario de Matemáticas, Ed. Complutense)

I. - PROPIDADES OBTENIDAS DIRECTAMENTE.

No están relacionadas con la derivación. Se obtienen directamente de la expresión matemática de la función -*fórmula*-.

I. 1. - Dominio, Campo De Existencia O De Definición.

Es el conjunto de números reales para los cuales está definida la función. Se desiga por $D(f)$ o $Dom(f)$.

Casos:

- **Funciones polinómicas**, $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \bullet\bullet\bullet + a_{n-1}x + a_n \ (n \in IN,\ a_{i=0,1,\ldots,n} \in IR)$: $D(f) = IR$.
- **Funciones racionales**, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ($P(x)$ y $Q(x)$ funciones polinómicas): $D(f)$ está determinado por todos los valores de x que no anulan el denominador -*si* $x = x_0$ *anula el denominador sin anular a la vez el numerador*, *la recta* $x = x_0$ *es una asíntota vertical de la función*-.
- **Funiones exponenciales**, $f(x) = a^x \ (a \in IR,\ a > 0,\ a \neq 1)$: $D(f) = IR$.
- **Funciones logarítmicas**, $f(x) = \log_a x \ (a \in IR,\ a > 0,\ a \neq 1)$: $D(f) = (0, +\infty)$.
- **Funciones radicales**, $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$ ($n \in IN$, $P(x)$ función polinómica):
  - n impar $\Rightarrow D(f) = IR$.
  - n par $\Rightarrow D(f)$ está determinado por los valores de x que hacen positivo o nulo el radicando, $P(x) \geq 0$.
- **Funciones trigonométricas**, x expresa ángulos en radianes:
  - $f(x) = \operatorname{sen} x : D(f) = IR$.
  - $f(x) = \cos x : D(f) = IR$.
  - $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} : D(f) = IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right\}$, donde hemos quitado los valores de x que anulan el denominador.
  - $f(x) = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} : D(f) = IR - \left\{k\pi,\ k \in Z\right\}$.
  - $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} : D(f) = IR - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right\}$.
  - $f(x) = \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} : D(f) = IR - \left\{k\pi,\ k \in Z\right\}$.

I. 2. - Recorrido.

Es el conjunto de las imágenes de la variable independiente, $\{f(x),\ x \in D(f)\}$. Se designa por $f(D)$. Salvo en casos muy determinados es aconsejable obtener el recorrido de la propia gráfica de la función.

I. 3. - Simetría / Paridad.

- f **es par** $\Leftrightarrow$ $\left(si\ x \in D(f) \Rightarrow f(-x) = f(x)\right)$. Las funciones pares son simétricas respecto al eje Oy. Una función simétrica respecto al eje Oy es una **función simétrica**.
- f **es impar** $\Leftrightarrow$ $\left(si\ x \in D(f) \Rightarrow f(-x) = -f(x)\right)$. Las funciones impares son simétricas respecto al origen de coordenadas, $O(0,0)$. Una función simétrica respecto al origen de coordenadas es una **función antisimétrica**.
- De una función que no es par ni impar se dice que no tiene simetría definida.

Una función nunca puede ser simétrica respecto al eje Ox, por la propia definición de función. Para estudiar la simetría de una función calculamos su paridad: comprobamos si $f(-x)$ es igual a $f(x)$, a $-f(x)$ o a nunguna de las dos.

I. 4. - Periodicidad.

Una **función** es **periódica** si existe un número real no nulo, T, llamado **período**, tal que para todo x del dominio se verifica que $f(x+T) = f(x)$.

Las funciones trigonométricas son periódicas.

Para estudiar la periodicidad de una función planteamos la ecuación en T: $f(x+T) = f(x)$. Si podemos obtener un valor finito y distinto de cero para T, entonces la función es periódica.

I. 5. - Puntos De Corte Con Los Ejes.

- **Eje** Ox; $(x_1,0),(x_2,0),\ldots$: Todos los puntos del eje Ox tienen coordenada y igual a cero. Por tanto, la coordenada x de los puntos de corte de la gráfica con el eje Ox se calculan resolviendo la ecuación $y = f(x) = 0$. Puede haber más de un punto de corte con el eje Ox, o ninguno.
- **Eje** Oy; $(0,y_1)$: Todos los puntos del eje Oy tienen coordenada x igual a cero. Por tanto, la coordenada y del punto de corte de la gráfica con el eje Oy es igual a $f(0)$. Con el eje Oy solo puede haber como máximo un punto de corte.

I. 6. - Signo De La Función.

Tratamos de estudiar los intervalos dentro del dominio de la función para los que ésta es positiva o negativa. Los extremos de los intervalos del dominio donde la función es positiva o negativa son los puntos de corte con el eje Ox -*donde lógicamente cambia el signo de la función*- y, de haberlas, las asíntotas verticales -*donde ya veremos que puede haber saltos desde* $+\infty$ *hasta* $-\infty$ *y viceversa*, *o no*-. Comprobamos el signo de $f(x)$ en cada uno de los intevalos dándole a x cualquier valor dentro de cada intervalo; así sabremos si la gráfica de la función queda por encima o por debajo del eje Ox. Los extremos de los intervalos son siempre abiertos.

I. 7. - Acotación.

Una función etá acotada si el recorrido está acotado. Si la función está acotada se pueden calcular:

- **Extremo superior** -*la menor de las cotas superiores de la función*-. Si éste pertenece a f(D) se llama **máximo**.

$y = \sup(f)$ $(= \max(f)$ si pertenece a $f(D))$

- **Extremo inferior** -*la mayor de las cotas inferiores de la función*-. Si éste pertenece a $f(D)$ se llama **mínimo**.

$y = \inf(f)$ $(= \min(f)$ si pertenece a $f(D))$

Por ejemplo, las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ estan acotadas superior e inferiormente:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max(f) = 1 \\ \min(f) = -1 \end{array} \right\}$$

$$g(x) = \cos x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max(f) = 1 \\ \min(f) = -1 \end{array} \right\}$$

I. 8. - Asíntotas.

Son rectas hacia las cuales se aproximan las ramas de la gráfica de una función, pudiendo ésta cortarlas -*sólo a las horizontales y a las oblicuas*- o no. Existen tres tipos: verticales, horizontales y oblicuas -*las dos última excluyentes para una misma función*-.

I. 8. 1. - Asíntotas Verticales.

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \ (ó - \infty) \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \ (ó - \infty) \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \ (ó - \infty)$$

En una asíntota vertical no está definida la función, por lo tanto la gráfica de ésta no puede en ningún caso cortar a la asíntota verical. Una función puede no tener asíntota vertical, puede tener una e incluso puede llegar a tener infinitas asíntotas verticales -*por ejemplo la función* $\operatorname{tg} x$-. En las funciones racionales las asíntotas verticales se hallan en los valores de x que anulan el denominador, pero no el numerador.

I. 8. 2. - Asíntotas Horizontales.

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la función$f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = k \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = k$$

Una función puede tener como máximo dos asíntotas horizontales -*para* $x \to +\infty$ *y* $x \to -\infty$-. La función puede cortar a la asíntota horizontal en uno o varios puntos. Para calcularlos -*si los hay*- resolvemos la ecuación $f(x) = k$, obteniendo puntos con coordenadas (x_1, k), (x_2, k), etc. Es conveniente estudiar si la función se acerca a la asíntota horizontal por encima o por debajo; en geneal ésto no es difícil teniendo en cuenta el signo de la función y los posibles cortes con dicha asíntota.

I. 8. 3. - Asíntotas Oblicuas.

La recta $y = mx + n$, con m y n finitos y $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de la función $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$$

La asíntota oblicua quedará determinada cuando conozcamos los valores de m y n. Procederemos del siguiente modo:

Paso 1 Calculamos m: $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

Paso 2 Conocido m, calculamos n: $n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$

Si $m = 0$ o $m = \infty$ o $n = \infty$ no hay asíntota oblicua.

Si una función tiene asíntotas horizontales, entonces no tiene asíntotas oblicuas y viceversa.

Una funcion puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas -*para* $x \to +\infty$ *y* $x \to -\infty$-. La gráfica de la función puede cortar a la asíntota oblicua en uno o varios puntos. De haberlos, se determinan resolviendo la ecuación $f(x) = mx + n$; con los valores de x que resulten obtenemos los correspondientes valores de y utilizando la fórmula de la función o la de la asíntota oblicua. Es conveniente estudiar i la gráfica de la función se acerca a la asíntota oblicua por encima o por debajo.

I. 9. - **Continuidad**.

$$f \text{ es continua en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Esto implica que existe el límite, y por lo tanto los límites laterales cuando x tiende a a son iguales, que f está definida en $x = a$ y que además $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Un fallo en cualquiera de estas tres circunstancias provoca una discontinuidad en la función. Siendo estrictos no podemos hablar de discontinuidad en $x = a$ si $a \notin D(f)$, pero por abuso del lenguaje se habla de discontinuidades en algunos puntos para los que no está definida la función -*aunque sí lo está en un entorno reducido de ellos*-, por ejemplo en las asíntotas verticales.

Todas las funciones elementales son continuas en su dominio de definición.

Las funciones definidas a trozos serán continuas si lo son en sus intervalos de definición y en los puntos de unión de los mismos. En estos puntos tendremos que ver que la función esté definida y que los límites laterales existan y sean iguales.

I. 10. - **Puntos Auxiliares**.

Es conveniente ir reflejando en nuestro sistema de referencia cartesiano cada una de las propiedades que vamos calculando cuando queremos representar una función. También podemos añadir algunos puntos del tipo $(x, f(x))$ que vayan clarificando la forma de la curva.

II. - **PROPIEDADES OBTENIDAS POR LAS DERIVADAS SUCESIVAS**.

Son propiedades que pecisan del cálculo de la primera y/o la segunda derivada de la funcion -$f'(x), f''(x)$- para su estudio.

II. 1. - **Monotonía** -**Crecimiento y Decrecimiento**-.

Sea la función $f(x)$, si $f'(x)$ es $\left\{\begin{array}{c} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array}\right\}$ en el intervalo (a,b), entonces $f(x)$ es $\left\{\begin{array}{c} \text{creciente} \\ \text{constante} \\ \text{decreciente} \end{array}\right\}$ respectivamente en dicho intervalo.

Se trata por tanto de estudiar el signo de la primera derivada de la función en los intervalos adecuados del dominio.

Procedimiento:

Paso 1 Calculamos $f'(x)$.

Paso 2 Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$.

Paso 3 Estudiamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos abiertos delimitados por las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ y por las asíntotas verticales -*dentro de cada uno de estos intervalos el signo de* $f'(x)$ *permanece constante*-.

Paso 4 El signo de $f'(x)$ nos indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

II. 2. - Puntos Críticos.

Cuando hablamos de puntos críticos nos referimos a puntos donde la función alcanza un máximo o un mínimo relativos. En estos puntos la función cambia de monotonía. También se conocen como **Puntos Estacionarios**, y en ellos la gráfica tiene tangente horizontal, es decir, $f'(x) = 0$.

Si $P(a,f(a))$ es punto crítico de $f(x) \Rightarrow f'(a) = 0$.

¿Cómo saber si en un punto crítico hay un máximo o un mínimo de la función?

a. Estudiando la monotonía a un lado y a otro del punto crítico.

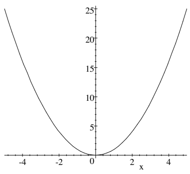
b. Mediante la derivada segunda de la función:

Si $P(a,f(a))$ es punto crítico $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{si } f''(a) < 0 \Rightarrow \text{ hay máximo -}f\text{ es cóncava-} \\ \text{si } f''(a) > 0 \Rightarrow \text{ hay mínimo -}f\text{ es convexa-} \end{array} \right\}$

II. 3. - Curvatura.

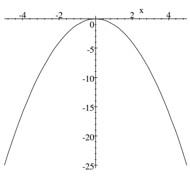
La curvatura de las funciones se define mirándolas ”de abajo a arriba”. Así, si desde abajo una curva semeja el interior de una circunferencia, decimos que es **cóncava**; y si desde abajo se ve como el exterior de una circunferencia, decimos que es **convexa**. Una buena forma de no confundirse es pensar que si desde abajo podemos ”besar” -*con beso*- la curva, entonces es convexa, y en caso contrario es cóncava.

$f(x) = x^2$



Esta función es convexa en todo su dominio.

$f(x) = -x^2$



Esta función es cóncava en todo su dominio.

Sea $f(x)$, si $f''(x)$ es $\left\{ \begin{array}{c} = 0 \\ > 0 \\ < 0 \end{array} \right\}$ en el intervalo (a,b), entonces $f(x)$ es $\left\{ \begin{array}{c} \text{lineal} \\ \text{convexa} \\ \text{cóncava} \end{array} \right\}$ respectivamente en dicho intervalo.

Hemos de estudiar por tanto la curvatura de la función en los intervalos adecuados del dominio a través del signo de la segunda derivada.

Procedimiento:

Paso 1 Calculamos $f''(x)$.

Paso 2 Resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$.

Paso 3 Estudiamos el signo de $f''(x)$ en los intervalos abiertos delimitados por las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$ y por las asíntotas verticales -*dentro de cada uno de estos intervalos el signo de* $f''(x)$ *permanece constante*-.

Paso 4 El signo de $f''(x)$ nos indica los intervalos de curvatura de la función.

II. 4.- **Puntos de Inflexión**.

Una función tiene un punto de inflexión en $P(a,f(a))$ si la función cambia de curvatura en ese punto -*en dicho punto la función no es cóncava ni convexa*-.

Si $P(a,f(a))$ es Punto de inflexión $\Rightarrow f''(a) = 0$.

Los **puntos de inflexión** son los determinados por la ecuación $f''(x) = 0$.

NOTA FINAL:

El cálculo acertado de todas estas propiedades y su traslación a un sistema de ejes cartesianos nos conducirá indefectiblemente al dibujo de la gráfica de nuestra función. Es aconsejabe ir trasladando al dibujo cada propiedad a medida que las vayamos calculando y no olvidarnos de ir poniéndole nombre a todos los elementos del diagrama.