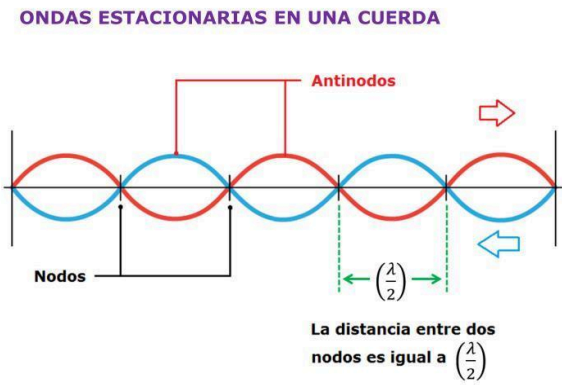
ECUACIÓN DE ONDAS ESTACIONARIAS

Cuerda de longitud L sujeta por los dos extremos (nodos en x=0 y x=L):



$$y_1 = A_1 \sin sin\,(\omega t - kx)$$

$$y_2 = A_2 \sin sin\,(\omega t + kx)$$

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \sin sin\,(\omega t - kx) + A_2 \sin sin\,(\omega t + kx)$$

- *1ª condición de contorno, nodo en* $x = 0 \Rightarrow y(x = 0, t) = 0$*:*

$$y(x = 0, t) = A_1 \sin sin\,(\omega t) + A_2 \sin sin\,(\omega t) = A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = -A_2\ (¡OMG!) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = y_1 + y_2 = y_2 + y_1 = A_2 \sin sin\,(\omega t + kx) - A_2 \sin sin\,(\omega t - kx)$$ <u>(Ojo, truco)</u>

$$[Recordemos\ que\ \sin sin\, a - \sin sin\, b = 2 \cos cos\, \frac{a+b}{2}\ \sin sin\, \frac{a-b}{2}\ ]$$

Por lo que la función de onda estacionaria queda:

$$y = y_1 + y_2 = y_2 + y_1 = A_2 \sin sin\,(\omega t + kx) - A_2 \sin sin\,(\omega t - kx) = \quad = 2A_2 \cos cos\, \frac{\omega t + kx + \omega t}{2}$$

es decir,

$$y = \boxed{2A \cos cos\, \omega t\ \sin sin\, kx}\ ,\ con\ A = |A_1| = |A_2|$$

$$\left(Onda\ Estacionaria\ de\ amplitud\ A_r = 2A \sin sin\, kx \Rightarrow y = A_r \cos cos\, \omega t\ \right)$$

Nodos y vientres en la onda estacionaria:

<u>Nodos</u>: Puntos de la cuerda que no vibran, es decir,

$$A_r = 2A \sin sin\, kx = 0m \Rightarrow \sin sin\, kx = 0 \Rightarrow kx = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n\frac{\lambda}{2}, n = 0, 1, 2...$$

<u>Vientres</u>: Puntos en los que la amplitud es máxima, es decir,

$$A_r = 2A \sin sin\, kx = 2A \Rightarrow \sin sin\, kx = \pm 1 \Rightarrow kx = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{(2n+1)\pi}{2k} = \frac{(2n+1)\pi}{2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda}} = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}, n = 0, 1, 2...$$

- *2ª condición de contorno, nodo en $x = L \Rightarrow y(x = L, t) = 0$:*

$$y = 2A \cos cos\, \omega t \ \sin sin\, kL = 0 \Rightarrow \sin sin\, kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow L = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}, n = 1, 2, 3...$$

$$\nu = \frac{v_p}{\lambda} = \frac{nv_p}{2L}, n = 1, 2, 3...$$

Éstas son las **frecuencias propias** de la cuerda. Para n = 1, $\nu_1 = \frac{v_p}{2L}$ es la **frecuencia fundamental** de la cuerda, el resto de frecuencias se llaman **armónicos**.